USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Derivadas de Lie: Transformaciones infinitesimales

José Miguel Balado Alves

2019/2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Derivadas de Lie: Transformaciones infinitesimales

José Miguel Balado Alves

Junio/2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Coñecemento: Geometría y Topología
Título: Derivadas de Lie: Transformaciones infinitesimales
Breve descrición do contido
Introducir a derivada de Lie tanto de campos de vectores como de campos de tensores sobre unha variedade diferenciable. No caso de variedades dotadas dunha estrutura adicional (métrica de Riemann, estrutura case complexa, etc.) obter as expresións locais das súas transformacións infinitesimais e estudar algunhas propiedades das mesmas.
Recomendacións
Ter cursado ou estar cursando a materia "Variedades Diferenciables" correspondente ao cuarto curso do Grao en Matemáticas.
Outras observacións

Índice general

Resumen

El eje central de este trabajo es la construcción de procesos de derivación sobre variedades diferenciables que sean coherentes y de carácter general. Estudiaremos dos, uno basado en la identificación de espacios tangentes a lo largo de las curvas integrales de un campo de vectores mediante el flujo del campo de vectores (derivada de Lie), y otro que usa la noción de transporte paralelo a lo largo de cualquier curva asociado a una conexión dada para tal identificación (derivada covariante).

Introducimos la derivada de Lie para campos de tensores, el concepto de transformación infinitesimal y caracterizamos los campos de vectores que resultan ser una tal transformación. En el estudio de la derivada covariante analizamos la existencia de conexiones distinguidas (conexión de Levi-Civita) y contruimos una correcta definición de carácter general para la aceleración de una curva.

Abstract

The main purpose of this work is the construction of two coherent and general derivation processes over smooth manifolds. The first one is based on the identification of the tangent spaces along the integral curves of a vector field by means of the associated flow (Lie Derivative), while the second one uses the notion of parallel transport along arbitrary curves induced by a connection for the identification (covariant derivative).

We introduce the Lie derivative of tensor fields, the concept of infinitesimal tranformation as well as their characterization. In the second part, after introducing the covariant derivative, we analyze the existence of distinguished conections (Levi-Civita conection). As an application, the acceleration of a curve is analyzed.

Introducción

El proceso de derivación de campos de vectores en $\mathbb{R}^n$ hace uso implícito tanto de la estructura de espacio vectorial como de las coordenadas cartesianas (asociadas a dicha estructura algebraica) que se corresponden con las coordenadas inducidas por la base canónica de $\mathbb{R}^n$. De hecho, un simple cambio de coordenadas ya da lugar a problemas (que surgen de la identificación de espacios tangentes). A modo de ejemplo, considerando la circuncerencia unidad en coordenadas cartesianas y polares se puede observar que un proceso “poco cuidadoso"de derivación conduce inexorablemente a una contradicción (véase el Ejemplo 6.15). En consecuencia, será necesario revisar el proceso de derivación sobre variedades, lo que constituye el objetivo central de este trabajo.

La raíz del proceso de derivación, que parte del estudio de la variación de un objeto dado, presenta la dificultad operativa de que los objetos a estudiar se encuentran en espacios vectoriales distintos y, por lo tanto, será necesario disponer de alguna herramienta que permita identificar dichos espacios vectoriales a fin de poder calcular los términos del cociente incremental de la derivada.

De modo general, fijado un campo de vectores X en la variedad existen dos procedimientos que permiten identificar los espacios vectoriales tangentes a lo largo de las curvas integrales de X. Uno de ellos (que tan solo depende del campo de vectores X) está determinado por el flujo del campo, lo que da lugar a la noción de derivada de Lie. El otro proceso se basa en la existencia de un nuevo objeto sobre la variedad, una derivada covariante. La existencia de una derivada covariante es equivalente a la de un desplazamiento paralelo (a lo largo de cualquier curva) y, por tanto, da lugar a un nuevo proceso de identificación.

En primer lugar se estudia la identificación de espacios tangentes mediante el flujo de un campo de vectores, estableciendo la derivada de Lie para funciones (que coindice con el proceso de derivación usual), para campos de vectores (donde se prueba su relación con el producto corchete) y se extiende a campos de tensores. Buscando aquellos campos de vectores que anulan un cierto campo de tensores en la derivada de Lie, se llega al concepto de transformación infinitesimal (aquellos campos de vectores para los que las transformaciones asociadas a su flujo uni-paramétrico mantienen invariante un cierto campo de tensores).

Considerando el otro proceso de identificación, se ve que este depende de la conexión elegida, y por ello se prueba la existencia de conexiones que destacan entre el resto y gozan de unicidad sobre cierto tipo de variedades, la conocida como conexión de Levi-Civita. En términos de esta conexión se introduce el concepto de aceleración de una curva y se muestra de manera explícita cómo resolver el problema de la derivación cuando se utilizan cordenadas diferentes de las cartesianas.

En esta memoria estudiamos ambos procesos, tanto sobre campos de vectores como sobre campos de tensores. De un modo más preciso, la memoria se estructura como sigue.

En el Capítulo 1 se establece la notación que se usará en lo que sigue del trabajo; recordamos nociones básicas como las de variedad, campo de vectores, flujo o derivación vistas en la asignatura de *Variedades Diferenciables*; e introducimos los conceptos de grupos 1-paramétricos, campos de tensores (que generalizan los campos de vectores ya vistos) y contracciones. Se enuncian también resultados de interés como la Proposición 1.5, que muestra como varían los grupos de transformaciones por un difeomorfismo, o el Corolario 1.7, que caracteriza los campos de vectores invariantes por un difeomorfismo. En la parte final del capítulo, introducimos algunos ejemplos especiales de campos de tensores que serán relevantes para el trabajo.

El Capítulo 2 se centra en la construcción de la derivada de Lie para campos de vectores y demostración de la Proposición 2.2, que nos dice que dado un campos de vectores X sobre una variedad diferenciable M, la derivada de Lie $\mathcal{L}_X Y$ coincide con el producto corchete $[X, Y]$ para cualquier campo de vectores Y sobre M.

En el Capítulo 3 se introduce la derivación sobre el álgebra de campos de tensores para poder extender la derivada de Lie a estos. En la Proposición 3.1 se demuestra que para estudiar la igualdad de dos derivaciones únicamente es necesario estudiar su actuación sobre funciones y campos de vectores. Se introduce en la Definición 3.3 la definición de derivada de Lie para campos de tensores y se muestra que es una extensión natural de la derivada de funciones y de la derivada de Lie (Proposición 3.5). En el resultado que sigue, Proposición 3.6, se da una expresión de la derivada de Lie sobre campos de tensores en función de la derivada de Lie sobre campos de vectores. Uno de los resultados más interesantes de esta sección es la caracterización de la derivada de Lie como derivación, donde en la Proposición 3.8 se demuestra que toda derivación se puede descomponer en función de la derivación inducida por la derivada de Lie y un campo de tensores de tipo $(1, 1)$.

El Capítulo 4 está centrado en las transformaciones infinitesimales para campos de tensores. En el Teorema 4.1 se demuestra que un campo de tensores es invariante por un grupo de transformaciones si y solo si $\mathcal{L}_X \mathcal{K} = 0$, donde X es el campo de vectores asociado al grupo de transformaciones. Con la igualdad $\mathcal{L}_{[X,Y]} = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]$ demostrada en el Lema 4.4 deducimos que el conjunto de transformaciones infinitesimales posee estructura de álgebra de Lie. El capítulo se cierra con ejemplos de transformaciones infinitesimales sobre los campos de tensores estudiados en los ejemplos del Capítulo 1. Destacamos que el conjunto de los campos de vectores de Killing (transformaciones infinitesimales para tensores métricos en variedades de Riemann) es un álgebra de Lie de dimensión finita, sin embargo el álgebra formada por los campos de vectores Hamiltonianos (transformaciones infinitesimales en variedades simplécticas) tiene dimensión no finita (pues se establece una equivalencia entre dicho álgebra y el espacio de 1-formas cerradas).

El Capítulo 5 está vertebrado sobre la caracterización dada en el Teorema 5.5-(i), donde se prueba la igualdad $\mathcal{L}_X = d \circ \iota_X + \iota_X \circ d$. Es decir, se demuestra que la derivada de Lie mide en cierto modo la anticonmutatividad de la diferencial interior y exterior (derivaciones sobre el álgebra de formas diferenciales que se introdujeron en la asignatura de *Variedades Diferenciables*).

En el último capítulo abordamos el problema de la derivación identificando espacios tangentes a lo largo de curvas arbitrarias mediante el transporte paralelo asociado a una conexión. La noción de conexión no es más que la generalización de derivada covariante para superficies en $\mathbb{R}^n$ que se vió en la asignatura de *Teoría Global de Superficies*. Extendemos aquí la derivada covariante o conexión en una superficie a campos de tensores. Se introduce el concepto de transporte paralelo sobre una variedad y conexión arbritarias (generalizando el transporte paralelo en $\mathbb{R}^n$ visto en *Teoría Global de Superficies*). En la Proposición 6.6 se muestra que el transporte paralelo induce un isomorfismo entre los espacios tangentes, permitiendo su identificación, lo que posibilita interpretar la derivada covariante asociada a la conexión como la derivación en sentido clásico a partir del transporte paralelo, tal como se muestra en la Proposición 6.7. No obstante, el proceso dependerá de la conexión escogida, es por eso que en la Sección 6.4 se prueba la existencia de una conexión distinguida en el caso de variedades de Riemann, la conexión de Levi-Civita. Se prueba el Teorema 6.13 (Teorema Fundamental de la Geometría de Riemann), que caracteriza dicha conexión de manera única. Como aplicación de todos estos conceptos, en la parte final de la memoria establecemos la noción de aceleración de una curva mostrando una correcta definición de la misma con el uso de la teoría de conexiones.

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo introduciremos la notación básica que será necesaria para el desarrollo de la memoria. Haremos especial énfasis en la noción de campo de vectores y su relación con los flujos locales. Además introduciremos los campos de tensores, con especial atención a las 1-formas y los campos de tensores de tipo $(1,1)$ y $(0,2)$, donde se encuadran las estructuras casi complejas y las métricas de Riemann.

1.1. Nociones básicas

Una *variedad topológica* de dimensión m es un espacio Hausdorff y localmente euclidiano de dimensión m. Diremos que la dupla $(\mathcal{U}, \varphi)$ es una carta sobre la variedad diferenciable M si $\varphi : \mathcal{U} \subset M \to \widetilde{\mathcal{U}} \subset \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo, donde $\mathcal{U}$ y $\widetilde{\mathcal{U}}$ son abiertos.

Dos cartas $(\mathcal{U}, \varphi)$ y $(\mathcal{V}, \psi)$ sobre M son compatibles si, o bien $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$, o bien los cambios de cartas $\psi \circ \varphi^{-1}$ y $\varphi \circ \psi^{-1}$ son aplicaciones de clase infinito entre abiertos de $\mathbb{R}^n$.

Llamamos *atlas* sobre M a una familia de cartas $\mathcal{A} = \{(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ sobre M verificando:

1. $M = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{U}_\alpha$,
2. Si $\alpha, \beta \in \Lambda$, las cartas $(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)$ y $(\mathcal{U}_\beta, \varphi_\beta)$ son compatibles.

Un atlas $\mathcal{A}$ es *atlas completo* o *maximal* si no está contenido en ningún otro atlas sobre M. Una *estructura diferenciable* no es más que una clase de equivalencia $[\mathcal{A}]_\infty$ formada por todos los atlas compatibles con $\mathcal{A}$.

De esta manera, una *variedad diferenciable* de dimensión m es un par $(M, [\mathcal{A}]_\infty)$ donde M es una variedad topológica de dimensión m y $[\mathcal{A}]_\infty$ una estructura diferenciable sobre M.

Una derivación es una función en un álgebra que generaliza el comportamiento del operador de derivación usual. De modo más preciso, dada un álgebra $\mathbb{A}$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, una $\mathbb{K}$-derivación es una aplicación $\mathbb{K}$-lineal $\mathcal{D} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ que verifica la regla de Leibniz $\mathcal{D}(ab) = \mathcal{D}(a)b + a\mathcal{D}(b)$. En especial nos interesará el espacio de funciones diferenciables $\mathcal{F}(M)$ sobre una variedad M visto como un $\mathbb{R}$-álgebra con las operaciones de funciones inducidas por las correspondientes operaciones en $\mathbb{R}$.

Fijado un punto $p \in M$, un *vector tangente* a M en el punto p es una aplicación $\mathbf{v} : \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}$ verificando

(i) $\mathbf{v}$ es $\mathbb{R}$-lineal, esto es: $\mathbf{v}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathbf{v}(f) + \mu \mathbf{v}(g)$,

(ii) $\mathbf{v}$ verifica la regla de Leibniz: $\mathbf{v}(fg) = \mathbf{v}(f)g(p) + f(p)\mathbf{v}(g)$

para cualesquiera $f, g \in \mathcal{F}(M)$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Geométricamente, podemos ver un vector tangente como una clase de equivalencia formada por todas las curvas diferenciables $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ que pasan por p en $t = 0$ y tienen el mismo vector velocidad $\frac{\partial}{\partial t}_{|t=0} c$.

Llamamos *espacio vectorial tangente* a M en p al espacio vectorial T_pM sobre $\mathbb{R}$ formado por todos los vectores tangentes a M en p dotado de las siguientes operaciones:

$$(\mathbf{v} + \mathbf{w})(f) := \mathbf{v}(f) + \mathbf{w}(g), \qquad (\lambda \mathbf{v})(f) := \lambda \mathbf{v}(f),$$

para cualesquiera $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_pM$ y escalares $\lambda \in \mathbb{R}$.

Sea $(\mathcal{U}, (x^1, \ldots, x^n))$ una carta local en la variedad M, donde $(x^1, \ldots, x^n) = \varphi$ no es más que un sistema de coordenadas. En cada punto $p \in \mathcal{U}$ los operadores de derivación parcial $\frac{\partial}{\partial x^\ell}_{|p}$ determinan vectores tangentes linealmente independientes que generan todo T_pM, por lo que constituyen una base de dicho espacio vectorial.

La unión disjunta de todos los espacios tangentes en todos los puntos de una variedad dada M constituye el *fibrado tangente* $TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$. El fibrado tangente tiene una estructura natural de variedad diferenciable de dimensión $\dim TM = 2n$. Sea $(\mathcal{U}, (x^1, \ldots, x^n))$ una carta local en M. Entonces cada vector tangente $\mathbf{v} \in T_pM$ se expresa como $\mathbf{v} = x^{\bar{1}} \frac{\partial}{\partial x^1}_{|p} + \cdots + x^{\bar{n}} \frac{\partial}{\partial x^n}_{|p}$ con lo que cada elemento $\xi \in TM$, $\xi = (p, \mathbf{v})$ con $\mathbf{v} \in T_pM$, se parametriza con coordenadas $(x^1, \ldots, x^n, x^{\bar{1}}, \ldots, x^{\bar{n}})$. La proyección natural $\pi : TM \to M$ dada por $\pi(\xi) = \pi(p, \mathbf{v}) = p$ define una submersión de TM sobre M.

Sea $f \in \mathcal{F}(M)$ una función diferenciable. Definimos la *diferencial de* f en el punto $p \in M$ como la aplicación lineal $df_p : T_pM \to \mathbb{R}$ dada por $df_p(\mathbf{v}) := v(f)$ para cada vector tangente $\mathbf{v} \in T_pM$. Es inmediato comprobar que df_p es una aplicación lineal (y por tanto un elemento del espacio vectorial dual T_p^*M).

El espacio dual del espacio vectorial tangente, T_p^*M, recibe el nombre de *espacio cotangente*. Cada parametrización local $(\mathcal{U},(x^1,\ldots,x^n))$ induce una base de T_p^*M dada por las diferenciales de las funciones coordenadas $\{dx_p^1,\ldots,dx_p^n\}$. La unión disjunta de todos los espacios cotangentes en todos los puntos de una variedad dada M constituye el *fibrado cotangente* $T^*M=\bigcup_{p\in M}T_p^*M$. El fibrado cotangente tiene una estructura natural de variedad diferenciable de dimensión $\dim TM=2n$. Sea $(\mathcal{U},(x^1,\ldots,x^n))$ una carta local en M. Entonces cada covector $\mathbf{v}^*\in T_p^*M$ se expresa como $\mathbf{v}^*=x_{1'}dx_p^1+\cdots+x_{n'}dx_p^n$ con lo que cada elemento $\omega\in T^*M$, $\omega=(p,\mathbf{v}^*)$ con $\mathbf{v}^*\in T_p^*M$, se parametriza con coordenadas $(x^1,\ldots,x^n,x_{1'},\ldots,x_{n'})$. La proyección natural $\pi:T^*M\to M$ dada por $\pi(\omega)=\pi(p,\mathbf{v}^*)=p$ define una submersión de T^*M sobre M.

Sean M_1 y M_2 variedades diferenciables y $F:M_1\to M_2$ una aplicación diferenciable. Entonces para cada función diferenciable $f\in\mathcal{F}(M_2)$, la composición $f\circ F$ determina una función diferenciable $f\circ F\in\mathcal{F}(M_1)$. En cada punto $p\in M_1$ se define la *diferencial de F* en el punto p (o aplicación lineal tangente en p) como la aplicación $dF_p:T_pM_1\to T_{F(p)}M_2$ determinada por $dF_p(\mathbf{v})(f):=\mathbf{v}(f\circ F)$. Se sigue inmediatamente de la definición que la diferencial dF_p es una aplicación lineal.

1.2. Campos de vectores y flujos locales

Existen diversas formas equivalentes de introducir los campos de vectores en una variedad.

Definición 1.1. Un *campo de vectores* sobre una variedad diferenciable es una sección del fibrado tangente

$$X:p\in M\mapsto X_p\in T_pM,$$

donde la diferencibilidad del campo de vectores se expresará en términos de la diferenciabilidad de la sección X.

Alternativamente, un campo de vectores diferenciable puede ser definido en términos de derivaciones, de modo análogo a como se introdujeron los vectores tangentes. Así, un campo de vectores diferenciable es una derivación $\mathcal{D}$ del $\mathbb{R}$-álgebra de funciones diferenciables $\mathcal{F}(M)$.

Teorema 1.2. [3, Teorema 2.72] *Si X es un campo de vectores diferenciable sobre M entonces la aplicación $\mathcal{D}_X:\mathcal{F}(M)\to\mathcal{F}(M)$ dada por $\mathcal{D}_X(f):=df(X)$ es una derivación en $\mathcal{F}(M)$. Recíprocamente, para cada derivación $\mathcal{D}$ en $\mathcal{F}(M)$ existe un único campo de vectores diferenciable X sobre M tal que $\mathcal{D}_X=\mathcal{D}$.*

Sea $(\mathcal{U}, (x^1, \ldots, x^n))$ una carta local en M. Entonces $\frac{\partial}{\partial x^\ell} : p \in \mathcal{U} \mapsto \frac{\partial}{\partial x^\ell}_{|p}$ define un campo de vectores local sobre el abierto $\mathcal{U}$ de forma que todo campo de vectores X en M se expresa localmente en el abierto $\mathcal{U}$ como $X = X^\ell \frac{\partial}{\partial x^\ell}$, donde X^ℓ son funciones diferenciables definidas en el abierto $\mathcal{U}$.

Producto de campos de vectores

Interpretando los campos de vectores como derivaciones en el álgebra de funciones $\mathcal{F}(M)$, el iterado de dos campos de vectores no es un campo de vectores dado que XY no es una derivación puesto que

$$XY(fh) = X\{Y(f)h + fY(h)\} = XY(f)h + Y(f)X(h) + X(f)Y(h) + fXY(h).$$

Sin embargo el anti-simetrizado $[X, Y] := XY - YX$ sí es un campo de vectores, que llamaremos *producto corchete* (o *producto de Lie*) de los campos de vectores X e Y.

Si $X = X^j \partial_{x^j}$ y $Y = Y^j \partial_{x^j}$ en términos de un sistema de coordenadas $(x^1, \ldots, x^n)$, entonces $[X, Y]$ es un campo de vectores cuyas componentes respecto a $(x^1, \ldots, x^n)$ están dadas por

$$[X, Y] = \left\{ X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right\} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Bajo el producto corchete, $\mathfrak{X}(M)$ es un álgebra de Lie, esto es, $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ es una aplicación bilineal verificando

1. El producto es antisimétrico, i.e., $[X, Y] = -[Y, X]$,

2. El producto verifica la identidad de Jacobi $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$,

para cualesquiera X, Y, $Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Flujos locales y grupos 1-paramétricos de transformaciones

Dado un campo de vectores X sobre M, una curva diferenciable $c : I \subset \mathbb{R} \to M$ definida en un intervalo real I, $c(t)$ se dice que es una *curva integral de* X si se verifica

$$\frac{d}{dt} c(t) = X(c(t))$$

para cualquier $t \in I$.

La existencia de soluciones locales para el problema de valores iniciales de ecuaciones diferenciales garantiza la existencia de curvas integrales $c(t)$ verificando las condiciones iniciales $c(0) = p$, $c'(0) = X_p$ para cada punto $p \in M$. En general, dichas curvas integrales estarán definidas en intervalos $I = (-\epsilon_p, \epsilon_p)$, donde $\epsilon_p > 0$ dependerá del punto $p \in M$.

Llamaremos *flujo del campo de vectores* X a una función

$$\begin{array}{rcl} \Psi : \mathcal{V} \times M \subset \mathbb{R} \times M & \to & M \\ (t,p) & \mapsto & \Psi(t,p) \end{array}$$

de forma que para cada $p \in M$ la curva $\Psi_p(T) : \mathcal{V} \subset \mathbb{R} \to M$ es una curva integral de X verificando las condiciones iniciales $\Psi_p(0) = p$ y $\Psi'_p(0) = X_p$.

Se dice que el flujo es *completo* si las curvas integrales de X están definidas en toda la recta real, i.e., $\mathcal{V} = \mathbb{R}$. Si Ψ está definida en un abierto $\mathcal{V} \times M \subset \mathbb{R} \times M$, entonces se dice que Ψ es un *flujo local*. La equivalencia entre campos de vectores y flujos locales viene dada por el siguiente resultado

Teorema 1.3. *Sea X un campo de vectores diferenciable y $p \in M$. Entonces existe un entorno abierto $U \in M$ de p, $\epsilon > 0$ y un grupo 1-paramétrico de transformaciones Ψ_t tal que*

1. *$\Psi : (-\epsilon, \epsilon) \times U \to$ es $\mathcal{C}^\infty$;*

2. *Si $|s|, |t|, |s+t| < \epsilon$, y q, $\Psi_t(q) \in U$ entonces $\Psi_s(\Psi_t(q)) = \Psi_{s+t}(q)$ y $\Psi_0(q) = q$;*

3. *Para cualquier $q \in U$, X_q es tangente a la curva $c : (-\epsilon, \epsilon) \to U$ donde $c(t) = \Psi_t(q)$ en $t = 0$.*

Un *grupo* 1-*paramétrico de transformaciones de* M es una aplicación diferenciable

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{R} \times M & \to & M \\ (t,p) & \mapsto & \Phi_t(p) \end{array}$$

de tal forma que

(i) para cada $t \in \mathbb{R}$, $\Phi_t : M \to M$ es una transformación de M (homeomorfismo en M),

(ii) para cada $t, s \in \mathbb{R}$ y cada $p \in M$, $\Phi_{t+s}(p) = \Phi_t \circ \Phi s(p)$.

Las condiciones anteriores muestran que la aplicación Φ es una acción del grupo aditivo $\mathbb{R}$ sobre la variedad M mediante difeomorfismos (ya que $\Phi_0 = \mathrm{Id}$ y $\Phi_t^{-1} = \Phi_{-t}$ para cada $t \in \mathbb{R}$).

Todo grupo 1-paramétrico determina un campo de vectores X que, en cada punto $p \in M$ es el vector tangente a la curva $\gamma(t) = \Phi_p(t)$ en tiempo cero, i.e., $X_p = \Phi'_p(0)$. Recíprocamente, todo campo de vectores X induce localmente un grupo 1-paramétrico de transformaciones (correspondiente al flujo local), tal como nos asegura el siguiente resultado.

Proposición 1.4. [1, Proposition 1.5] *Sea X un campo de vectores sobre M. Para cada punto $p \in M$, existe un entorno $\mathcal{U}$ de p, un número positivo ϵ y un grupo 1-paramétrico de transformaciones locales $\Phi_t : \mathcal{U} \to M$, $t \in I_\epsilon = (-\epsilon, \epsilon)$, que induce el campo de vectores X.*

Un campo de vectores es completo si su flujo es completo, o equivalentemente, si el grupo 1-paramétrico de transformaciones es global, algo que sucede sobre toda variedad compacta (ver, por ejemplo [1, Proposition 1.6]). Aunque no hemos explicitado las definiciones de flujo local y grupo 1-paramétrico local, estas son completamente análogas a sus correspondientes globales, siempre y cuando las distintas condiciones tengan sentido en función del dominio.

Se presentan ahora unos resultados que nos serán de interés en lo que resta del trabajo.

Sea X un campo de vectores en una variedad M y $F : M \to M$ una aplicación diferenciable. La diferencial de la aplicación F transforma X en un objeto F_*X que no es necesariamente un campo de vectores en M (sino más bien un campo de vectores a lo largo de la aplicación). Sin embargo, cuando F sea un difeomorfismo, F_*X sí es un campo de vectores en M, por lo que será interesante relacionar el flujo de F_*X con el difeomorfismo F.

Proposición 1.5. *Sea $F : M \to M$ un difeomorfismo de M. Si un campo de vectores X genera un grupo local 1-paramétrico de tranformaciones locales Φ_t, entonces el campo de vectores F_*X genera el grupo de transformaciones dado por $\hat{\Phi}_t = F \circ \Phi_t \circ F^{-1}$.*

Demostración. Obsérvese en primer lugar que $\hat{\Phi}_t$ determina un grupo 1-paramétrico de transformaciones. De hecho,

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_{t+s} &= F \circ \Phi_{t+s} \circ F^{-1} \\ &= F \circ \Phi_t \circ \Phi_s \circ F^{-1} \\ &= (F \circ \Phi_t \circ F^{-1}) \circ (F \circ \Phi_s \circ F^{-1}) \\ &= \hat{\Phi}_t \circ \hat{\Phi}_s \,. \end{aligned}$$

Además, para cada punto $p \in M$ el campo de vectores X_p es el vector tangente a la curva $\Phi_t(p)$ en tiempo $t = 0$. Denotando por $q = F^{-1}(p)$, se tiene que el campo de vectores $(F_*X)_p = dF_q(X_q)$, donde $X_q \in T_qM$ es el vector tangente a la curva $\Phi_t(q) = \Phi_t(F^{-1}(p))$ en tiempo $t = 0$. Por tanto, $(F_*X)_p$ es tangente a la curva $(F \circ \Phi_t \circ F^{-1})(p) = \hat{\Phi}_t(p)$ en $t = 0$, lo que prueba que $\hat{\Phi}_t$ es el grupo 1-paramétrico asociado a F_*X. □

Corolario 1.6. *Un campo de vectores X es invariante por un difeomorfismo F, es decir, $F_*X = X$, si sólo si F conmuta con el flujo de X, i.e., $F \circ \Phi_t = \Phi_t \circ F$.*

Enunciamos ahora un resultado que relaciona los grupos 1-paramétricos de X e Y con el producto corchete $[X, Y]$; la demostración del mismo queda relegada hasta que el desarrollo del trabajo lo permita.

Proposición 1.7. *Supongamos que X e Y generan los grupos 1-paramétricos Φ_t y Ψ_t, respectivamente. Entonces $\Phi_t \circ \Psi_s = \Psi_s \circ \Phi_t$ para cualesquiera s y t si y sólo si $[X, Y] = 0$.*

1.3. Campos de tensores

1.3.1. 1-formas

Una 1-forma (o covector) en un espacio vectorial V es un elemento del espacio dual V^*, esto es, una aplicación lineal $\mathbf{v}^* : V \to \mathbb{R}$. De modo análogo a los campos de vectores, una 1-forma en una variedad es una asignación diferenciable de un covector en cada espacio tangente. A la hora de formalizar dicha diferenciabilidad se pueden seguir varios caminos equivalentes.

Una *1-forma* o *campo de covectores* sobre M es una sección del fibrado cotangente,

$$\begin{array}{rcl} \omega : M & \to & T^*(M) \\ p & \mapsto & (p, \omega_p) \end{array}$$

donde $\omega_p \in T_p^* M$.

De otra manera, una 1-forma (diferenciable) puede interpretarse como una aplicación $\mathcal{F}(M)$-lineal $\omega : \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{F}(M)$ donde $\omega(X)$ es la función diferenciable $\omega(X) : p \in M \mapsto \omega(X)(p) := \omega_p(X_p)$, para cualquier campo de vectores X sobre M.

Sea $(\mathcal{U}, (x^1, \ldots, x^n))$ una carta local en M. Teniendo en cuenta que $\{dx^1, \ldots, dx^n\}$ es una base local del espacio de 1-formas en cada espacio tangente, la 1-forma ω se expresa localmente como $\omega = \omega_\ell dx^\ell$ para ciertas funciones $\omega_\ell : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ diferenciables.

Dada una aplicación diferenciable entre variedades diferenciables, $F : M \to \tilde{M}$, para cada 1-forma $\tilde{\omega}$ en $\tilde{M}$, definimos su "pull-back" como la 1-forma en M, $F^*\tilde{\omega}$, dada por

$$(F^*\tilde{\omega})(X) = \tilde{\omega}_{F(p)}(dF_p X)$$

para cualquier $X \in T_p M$.

1.3.2. Campos de tensores

Si consideramos un espacio vectorial V, con base $\{e_1, \ldots, e_n\}$, y su espacio dual V^* con base, $\{e^1, \ldots, e^n\}$, y construimos el espacio vectorial producto de r copias de V y s copias de V^*, es decir $\mathbb{T}_s^r(V) = V \otimes \overset{r}{\ldots} \otimes V \otimes V^* \otimes \overset{s}{\ldots} \otimes V^*$, un tensor de tipo (r, s) es un elemento de dicho espacio vectorial:

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_{j_1, \ldots, j_s}{}^{i_1, \ldots, i_r} e_{i_1} \otimes \ldots e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_s}$$

Toda base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de V induce una base $v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_r} \otimes v^{j_1} \otimes \cdots \otimes v^{j_s}$ de $\mathbb{T}_s{}^r(V)$

Si $(\mathcal{U}, (x^1, \ldots, x^n))$ es una carta local, entonces en cada punto $p \in \mathcal{U}$ se tiene que $\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s}$ es una base de $\mathbb{T}_s{}^r(T_pM)$

Observación 1.8. El espacio de tensores $\mathbb{T}_s{}^0(V)$ puede ser interpretado como el espacio de todas las aplicaciones s-lineales de $V\times \overset{s}{\cdots} \times V \to \mathbb{R}$. Análogamente, el espacio de tensores $\mathbb{T}_0{}^r(V)$ puede ser interpretado como el espacio de todas las aplicaciones r-lineales de $V^*\times \overset{r}{\cdots} \times V^* \to \mathbb{R}$.

El espacio $\mathbb{T}_s{}^1(V)$ es isomorfo de forma natural al espacio de todas las aplicaciones s-lineales de $V\times \overset{s}{\cdots} \times V \to V$. De hecho, cada $\mathcal{K} \in \mathbb{T}_s{}^1(V)$, que respecto a una base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de V se expresa como $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{j_1,\ldots,j_s}{}^i\, e_i \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_s}$, se corresponde con una aplicación s-lineal $K : V\times \overset{s}{\cdots} \times V \to V$ determinada por $K(e_{j_1}, \ldots, e_{j_s}) = \sum_i \mathcal{K}^i_{j_1\ldots j_s}\, e_i$.

De manera análoga a como introdujimos los fibrados tangente y cotangente, construimos el *fibrado tensorial de tipo (r,s)* como $\mathbb{T}^r_s(TM) = \bigcup_{p\in M} \mathbb{T}^r_s(T_pM)$, donde $\mathbb{T}^r_s(T_pM)$ representa el espacio de tensores de tipo (r, s) sobre el espacio tangente T_pM.

Definición 1.9. (**Campos de tensores**) Un *campo de tensores* $\mathcal{K}$ sobre T_pM es una sección del fibrado tensorial

$$\mathcal{K} : p \in M \to \mathcal{K}_p \in \mathbb{T}^r_s(T_pM)$$

donde la diferencibilidad del campo de tensores se expresará en términos de la diferenciabilidad de la sección $\mathcal{K}$.

Podemos expresar un tensor en función de los elementos de una base del espacio vectorial, T_pM, y de su dual, T_p^*M, del siguiente modo:

$$\mathcal{K}_p = \mathcal{K}_{j_1,\ldots,j_s}{}^{i_1,\ldots,i_r}\; \partial_{x^{i_1}} \otimes \ldots \partial_{x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s}$$

donde $\mathcal{K}_{j_1,\ldots,j_s}{}^{i_1,\ldots,i_r}$ son funciones definidas en el abierto coordenado $\mathcal{U} \subset M$ llamadas *componentes de* $\mathcal{K}$ respecto al sistema de coordenadas $(\mathcal{U}, (x^1, \ldots, x^n))$.

Un campo de tensores $\mathcal{K}$ de tipo $(0, s)$ (respectivamente de tipo $(1, s)$) en M puede ser visto como una aplicación s-lineal de $\mathfrak{X}(M)\times \overset{s}{\ldots} \times\mathfrak{X}(M)$ en $\mathcal{F}(M)$ (respectivamente en $\mathfrak{X}(M)$) tal que

$$\mathcal{K}(f_1X_1, \ldots, f_sX_s) = f_1 \ldots f_s\mathcal{K}(X_1, \ldots, X_s)$$

para cualesquiera $f_i \in \mathcal{F}(M)$ y $X_i \in \mathfrak{X}(M)$. Recíprocamente, una tal función puede verse como un campo tensorial de tipo $(0, s)$ (respectivamente $(1, s)$). De este modo si vemos una 1-forma ω como una aplicación $\mathcal{F}(M)$-lineal definida en el espacio de campos de vectores $\mathfrak{X}(M)$ con valores en $\mathcal{F}(M)$, ω no es más que un campo de tensores de tipo $(0, 1)$.

Por otra parte, un campo de vectores visto como una aplicación $X : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$ es simplemente un campo de tensores de tipo $(1, 0)$. El espacio $\mathbb{T}^0_0(V)$ representa el espacio de funciones sobre M.

1.3.3. Contracciones

Sea $T : V \to V$ un tensor de tipo $(1,1)$. Su traza $\mathrm{tr}(T) = T_k{}^k$ es la suma de los elementos de la diagonal de su expresión matricial. Generalizando esta idea se definen las contracciones de un tensor de tipo (r,s) del siguiente modo. Sea $\mathcal{K} \in \mathbb{T}_s{}^r(V)$ dado por

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_{j_1,\dots,j_s}{}^{i_1,\dots,i_r} e_{i_1} \otimes \dots e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_s}$$

un campo de tensores de tipo (r,s).

Para cada $1 \leq i \leq s$ y cada $1 \leq j \leq r$ se define la *contracción* $C_i{}^j(\mathcal{K})$ como el campo de tensores de tipo $(s-1, r-1)$ expresado en componentes por

$$C_i{}^j(\mathcal{K}) = \sum_k \mathcal{K}_{j_1,\dots,k\dots,j_s}{}^{i_1,\dots,k\dots,i_r} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes \widehat{e_k} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes \widehat{e^k} \otimes \cdots \otimes e^{j_s}$$

donde el superíndice k aparece en la i-ésima posición, el subíndice k aparece en la posición j-ésima y la notación $\widehat{e_k}$, $\widehat{e^k}$ significa que esos elementos han sido eliminados.

1.3.4. Ejemplos de campos de tensores

A continuación analizaremos algunos casos especiales de campos de tensores que serán de importancia a lo largo de esta memoria.

Métricas de Riemann

Un producto escalar en un espacio vectorial V es una aplicación bilineal simétrica y no degenerada

$$\langle\, ,\, \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

por tanto puede ser interpretada como una forma de tipo $(0,2)$ que, en una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de V se expresa como $\langle\, ,\, \rangle = a_{ij} v^i \otimes v^j$ para una matriz de coeficientes (a_{ij}) simétrica.

Una *métrica de Riemann* en una variedad es una asignación (diferenciable) de un producto escalar definido positivo en cada espacio tangente. Por tanto se corresponde con un campo de tensores de tipo $(0,2)$ simétrico y definido positivo que, en cada abierto coordenado $(\mathcal{U}, (x^1, \dots, x^n))$ se expresa como

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

para ciertas funciones diferenciables $g_{ij} = g_{ji}$ definidas en el abierto $\mathcal{U}$.

Toda superficie S en el espacio Euclídeo $\mathbb{R}^3$ hereda de forma natural un producto escalar en cada espacio tangente mediante la restricción del producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$, por lo que son variedades de Riemann en las que el campo de tensores métrico es la primera forma fundamental de la superficie.

Estructuras simplécticas

Un espacio vectorial simpléctico es un par (V, Ω) formado por un espacio vectorial y una forma bilineal antisimétrica no degenerada. Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V, entonces $\Omega = b_{ij} v^i \wedge v^j = c_{ij} v^i \otimes v^j$ para una matriz de coeficientes (c_{ij}) antisimétrica. Además, el carácter no degenerado de Ω hace que V tenga dimensión par.

Una *forma simpléctica* en una variedad diferenciable de dimensión $\dim M = 2m$ es una 2-forma Ω no degenerada y cerrada, i.e.,

$$\Omega^m = \Omega \wedge \overset{m}{\cdots} \wedge \Omega \neq 0, \qquad d\,\Omega = 0,$$

donde d denota el operador diferencial exterior. Respecto a un sistema local de coordeanadas $(\mathcal{U}, (x^1, \ldots, x^n))$ la forma simpléctica se expresa como

$$\Omega = \Omega_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

para ciertas funciones diferenciables $\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}$ definidas en el abierto $\mathcal{U}$.

Estructuras casi complejas

Una estructura casi compleja sobre una variedad M es un campo de tensores J de tipo $(1,1)$ verificando $J^2 = -\operatorname{Id}$. Dicho campo de tensores induce un endomorfismo de cada espacio tangente $J_p : T_pM \to T_pM$ que viene motivado por el producto por la unidad imaginaria en los complejos (que también verifica $i^2 = -1$).

Si M es una variedad compleja parametrizada por coordenadas holomorfas $(z^1, \ldots, z^n)$ con $z^k = x^k + iy^k$, entonces tiene asociada una estructura casi compleja J definida localmente por

$$J(\frac{\partial}{\partial x^k}) = \frac{\partial}{\partial y^k}, \qquad J(\frac{\partial}{\partial y^k}) = -\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

El recíproco no es cierto en general, en el sentido que no toda estructura casi-compleja proviene de una variedad compleja, aunque este análisis se escapa de los objetivos de este trabajo.

En un sistema de coordenadas locales $(\mathcal{U}, (x^1, \ldots, x^n)$ la estructura casi-compleja se expresa como

$$J = J_i{}^{\ell} \frac{\partial}{\partial x^{\ell}} \otimes dx^i$$

para ciertas funciones diferenciables $J_i{}^{\ell}$ definidas en el abierto $\mathcal{U}$.

Capítulo 2

Derivadas de Lie de campos de vectores

El objetivo de este capítulo es introducir el concepto de derivada de Lie de campos de vectores como un paso previo para la derivación de Lie de campos de tensores.

La idea de extender la derivada usual con el objetivo de derivar campos de vectores Y supondría analizar límites de la forma $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[Y_{p+t} - Y_p]$. Ahora bien, dado que los vectores $Y_{p+t} \in T_{p+t}M$ y $Y_p \in T_pM$ no es posible realizar la operación $Y_{p+t} - Y_p$ sin establecer previamente un isomorfismo que relacione los espacios vectoriales $T_{p+t}M$ y T_pM. De hecho, si $\phi_t : T_{p+t}M \longrightarrow T_pM$ es un isomorfismo de espacios vectoriales, entoces tendría sentido calcular el límite $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[\phi_h(Y_{p+t}) - Y_p]$. Ahora bien, en esta situación el valor del límite dependerá del isomorfismo elegido, por lo que sería deseable disponer de una familia de isomorfismos intrínseca al proceso de derivación.

Sea X un campo de vectores en M y denotemos con Φ_t el grupo 1-paramétrico local de transformaciones de M. Fijado un punto $p \in M$, Φ_t induce un isomorfismo entre los espacios vectoriales T_pM y $T_{\Phi_t(p)}M$ a través de su diferencial

$$(\Phi_t)_* : T_pM \to T_{\Phi_t(p)}M.$$

que permite identificar todos los espacios tangentes a lo largo de la curva integral de X pasando por p con el espacio tangente T_pM mediante la aplicación $(\Phi_t)_*^{-1}$. El hecho de que $(\Phi_t)_*$ sea un isomorfismo es consecuencia del Teorema de la Función Inversa (ver, por ejemplo [4, Theorem 5.11])

Definición 2.1. (**Derivada de Lie de campos de vectores**)
Sean X e Y campos de vectores sobre M, llamamos derivada de Lie de Y respecto X al

campo de vectores $\mathcal{L}_X Y$ definido por

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X Y)_p &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[Y - (\Phi_t)_* Y\right]_p \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[Y_p - (\Phi_t)_*(\Phi_{-t}(p)) Y_{\Phi_{-t}(p)}\right],\end{aligned}$$

donde Φ_t es el grupo 1-paramétrico de transformaciones locales de M determinado por X.

Nuestro primer objetivo es caracterizar la derivada de Lie de campos de vectores en términos del producto de Lie.

Proposición 2.2. [1, Proposition 1.9] *Sea X un campo de vectores sobre M. Entonces*

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y],$$

para cualquier campo de vectores Y en M.

El siguiente resultado técnico será importante tanto para demostrar la Proposición 2.2 como para posteriores resultados.

Sea X un campo de vectores en M y $p \in M$ tales que $X_p \neq 0$. Entonces existen coordenadas locales $(\mathcal{U}, (x^1, \dots, x^n))$ con $p \in \mathcal{U}$ de forma que el campo de vectores X se expresa como $X_{|\mathcal{U}} = \partial_{x^1}$. Así pues, en dichas coordenadas el flujo de X está dado por $\Phi_t(x^1, x^2, \dots, x^n) = (x^1 + t, x^2, \dots, x^n)$.

Así para cada $f \in \mathcal{F}(M)$, la composición $(f \circ \Phi_t)(x^1, x^2, \dots, x^n) = f(x^1 + t, x^2, \dots, x^n)$, por lo que podemos escribir su polinomio de Taylor

$$\begin{aligned}(f\circ\Phi_t)(x^1, X^2, \dots, x^n) &= f(x^1 + t, x^2, \dots, x^n) \\ &= f(x^1, x^2, \dots, x^n) + t\partial_{x^1} f(x^1, x^2, \dots, x^n) + \binom{\text{términos de orden}}{\text{superior}}.\end{aligned}$$

La función $g(t, p)$ en el Lema 2.3 viene dada por el resto del polinomio de Taylor de orden uno de la función $f \circ \Phi_t$.

Lema 2.3. [1, Lemma 1] *Sea $f(t, p)$ una función definida en en $I_\epsilon \times M$, donde $I_\epsilon = (-\epsilon, \epsilon)$ es un intervalo abierto. Si $f(0, p) = 0$ para cualquier $p \in M$, entonces existe una función $g(t, p)$ definida en $I_\epsilon \times M$ tal que $f(t, p) = tg(t, p)$. Además, $g(0, p) = \frac{\partial}{\partial t} f(0, p)$.*

Demostración. Basta tomar $g(t, p) = \int_0^1 f'(ts, p) ds$, y así $tg(t, p) = \int_0^1 f'(ts, p) t ds = f(t, p)$ y además $g(t, p) = \frac{f(t,p)}{t}$ para $t \neq 0$, por lo que $g(0, p) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,p)}{t} = f'(0, p)$. □

Sea X un campo de vectores en M con grupo 1-paramétrico de transformaciones asociado Φ_t. Para cada función diferenciable $f \in \mathcal{F}(M)$, consideramos la función $f \circ \Phi_t$. Teniendo en cuenta que $\Phi_0 = \mathrm{Id}$ se tiene que $(f \circ \Phi_t)(0, p) = p$ para cada punto $p \in M$, por lo que aplicando el lema anterior a la función $f \circ \Phi_t - f$, existe una función g definida en $I_\epsilon \times M$ tal que $f \circ \Phi_t = f + tg$. Además $g(0,p) = \frac{\partial}{\partial t}(f \circ \Phi_t)_{|t=0} = X(f)_p$. El siguiente lema formaliza la aplicación anterior del Lema 2.3.

Lema 2.4. [1, Lemma 2] *Sea X un campo de vectores en M con grupo 1-paramétrico de transformaciones Φ_t. Para cualquier función f en M existe una función $g_t(p) = g(t,p)$ tal que $f \circ \Phi_t = f + tg_t$.*

Demostración de la Proposición 2.2. Para cada función $f \in \mathcal{F}(M)$, consideramos una función g_t tal que $f \circ \Phi_t = f + tg_t$ y $g_0 = X(f)$ dada por el Lema 2.4. Sea $p \in M$ y denotemos con $p(t) = (\Phi_t)^{-1}(p) = \Phi_{-t}(p)$ la curva obtenida a partir del flujo que pasa por p. Entonces se tiene

$$((\Phi_t)_*Y)_p f = Y_{p(t)}(f \circ \Phi_t) = Y_{p(t)}f + tY_{p(t)}g_t.$$

Así, teniendo en cuenta que $F_*X(f) = X(f \circ F)$ y que $X_p f = \frac{d}{dt}(f \circ \Phi_t(p))_{|t=0}$, se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left[Y - (\Phi_t)_*Y\right]_p f &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left[Y_p f - Y_{p(t)} f\right] - \lim_{t\to 0} Y_{p(t)} g_t \\ &= X_p(Yf) - Y_p g_0 = X_p(Yf) - Y_p X(f) = [X,Y]_p f, \end{aligned}$$

de donde se sigue que $\mathcal{L}_X Y = [X,Y]$. □

Corolario 2.5. [1, Corollary 1.10] *Sea X un campo de vectores en M con grupo 1-paramétrico de transformaciones Φ_t. Entonces para cada valor de s se tiene*

$$(\Phi_s)_* \circ \mathcal{L}_X = \mathcal{L}_X \circ (\Phi_s)_*\,,$$

o equivalentemente

$$(\Phi_s)_*[X,Y] = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[(\Phi_s)_*Y - (\Phi_{s+t})_*Y]$$

para cualquier campo de vectores Y en M.

Demostración. Fijado un valor de s y teniendo en cuenta que los difeomorfismos preservan el producto corchete, se tiene que

$$\begin{aligned} (\Phi_s)_*\mathcal{L}_X Y &= (\Phi_s)_*[X,Y] = [(\Phi_s)_*X, (\Phi_s)_*Y] \\ &= [X, (\Phi_s)_*Y] = \mathcal{L}_X(\Phi_s)_*Y\,, \end{aligned}$$

dado que el campo de vectores X es invariante por su flujo (i.e., $X = (\Phi_s)_*X$) sin más que tener en cuenta que $\Phi_s \circ \Phi_t = \Phi_{s+t} = \Phi_t \circ \Phi_s$, como se mostró en el Corolario 1.6. □

Corolario 2.6. [1, Corollary 1.11] *Supongamos que X y Y generan los grupos locales 1-paramétricos Φ_t y Ψ_s, respectivamente. Entonces $\Phi_t \circ \Psi_s = \Psi_s \circ \Phi_t$ para cada s y t si y sólo si $[X, Y] = 0$.*

Demostración. Si $\Phi_t \circ \Psi_s = \Psi_s \circ \Phi_t$ para todo s y t, entonces Y es invariante por el flujo de X, Φ_t por el Corolario 1.6. Se sigue entonces de la Proposición 2.2 que $[X, Y] = 0$.

Recíprocamente, si $[X, Y] = 0$, entonces $\frac{d}{dt}((\Phi_t)_* Y) = 0$ para cada t sin más que tener en cuenta que la derivada de Lie $\mathcal{L}_X(\Phi_s)_* Y$ está dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(\Phi_s)_* Y &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[(\Phi_s)_* Y - (\Phi_t)_* \circ (\Phi_s)_* Y \right] \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[(\Phi_s)_* Y - (\Phi_{s+t})_* Y \right] , \end{aligned}$$

por lo que

$$\frac{d}{dt}(\Phi_t)_* Y_{|t=s} = -(\Phi_s)_* [X, Y] \, .$$

De este modo $(\Phi_t)_* Y$ es constante por lo que Y es invariante para cualquier Φ_t. Por el Corolario 1.6, el flujo de Y, Ψ_s, conmuta con todas las aplicaciones Φ_t. □

Capítulo 3

Derivada de Lie de campos de tensores

Definimos $\mathfrak{T}(TM) = \bigcup_{r,s=0}^{\infty} \mathbb{T}_s^r(TM)$, el conjunto de todos los campos de tensores de todos los tipos sobre M. $\mathfrak{T}(TM)$ es un álgebra sobre $\mathbb{R}$ con la multiplicación definida del siguiente modo: si $\mathcal{K}$, $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}(TM)$ entonces $(\mathcal{K} \otimes \mathcal{T})_p = \mathcal{K}_p \otimes \mathcal{T}_p$ para cualquier $p \in M$.

Derivaciones sobre $\mathfrak{T}(TM)$

Una *derivación en* $\mathfrak{T}(TM)$ es una aplicación lineal $D : \mathfrak{T}(TM) \to \mathfrak{T}(TM)$ que satisface las siguientes condiciones

1. D verifica la regla de Leibniz $D(\mathcal{K} \otimes \mathcal{T}) = D(\mathcal{K}) \otimes \mathcal{T} + \mathcal{K} \otimes D(\mathcal{T})$ para cualesquiera $\mathcal{K}$, $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}(TM)$;

2. D conserva el tipo, es decir, $D(\mathfrak{T}_s^r(TM)) \subset \mathfrak{T}_s^r(TM)$;

3. D conmuta con todas las contracciones.

Proposición 3.1. [1] *Dos derivaciones D_1 y D_2 sobre $\mathfrak{T}(TM)$ son iguales si y solo si coinciden al actuar sobre funciones y sobre campos de vectores.*

Demostración. Veamos en primer lugar que las derivaciones D son “operadores locales”, esto es, si un campo de tensores $\mathcal{K}$ se anula en un abierto $\mathcal{U}$, entonces $D\mathcal{K}$ se anula en $\mathcal{U}$. Fijemos un campo de tensores $\mathcal{K}$ que se anula en $\mathcal{U}$ y sea $p \in \mathcal{U}$. Sea f una función verificando $f(p) = 0$ y tal que $f = 1$ fuera de $\mathcal{U}$. Entonces se tiene que $\mathcal{K} = f\mathcal{K}$ y por ser D una derivación, $D\mathcal{K} = (Df)\mathcal{K} + f(D\mathcal{K})$. Como $\mathcal{K}$ y f se anulan en p, también lo hace $D\mathcal{K}$, lo que muestra que $D\mathcal{K}$ se anula en el abierto $\mathcal{U}$.

Se sigue entonces que si dos campos de tensores $\mathcal{K}$ y $\mathcal{K}'$ coinciden en un abierto $\mathcal{U}$, entonces $D\mathcal{K}$ y $D\mathcal{K}'$ también coinciden en $\mathcal{U}$.

Sea $D = D_1 - D_2$ la diferencia de las dos derivaciones. Nuestro objetivo será probar que si D se anula en $\mathcal{F}(M)$ y sobre campos de vectores $Y \in \mathfrak{X}(M)$, entonces se anula en $\mathfrak{T}(TM)$. Veamos en primer lugar que D se anula sobre 1-formas.

Sea $Y \otimes \omega \in \mathfrak{T}_1^1(M)$ un campo de tensores de tipo $(1,1)$. La contracción $C_1^1 : \mathfrak{T}_1^1(M) \to \mathcal{F}(M)$ está dada por la evaluación $C_1^1(Y \otimes \omega) = \omega(Y)$. Utilizando el hecho de que la derivación conmuta con las contracciones, tenemos

$$D(C_1^1(Y \otimes \omega)) = C_1^1(D(Y \otimes \omega)) = C_1^1(DY \otimes \omega) + C_1^1(Y \otimes D\omega).$$

Si la derivación se anula sobre funciones y sobre campos de vectores, entonces se tiene que $D(C_1^1(Y \otimes \omega)) = 0$ y $C_1^1(DY \otimes \omega) = 0$, con lo que de la expresión anterior se obtiene

$$0 = C_1^1(Y \otimes D\omega) = (D\omega)(Y)$$

para cualqueir campo de vectores Y, lo que muestra que $D\omega = 0$.

Sea $\mathcal{K}$ un campo de tensores de tipo (r,s) y $p \in M$ un punto arbitrario. Consideremos un entorno coordenado $(\mathcal{U}, (x^1, \dots, x^n))$ o de p donde el campo de tensores se expresa como

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_{j_1,\dots,j_s}{}^{i_1,\dots,i_r}\ \partial_{x^{i_1}} \otimes \dots \partial_{x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s}.$$

Como D es un operador local, basta probar que la derivacion D aplicada a cada sumando de la expresión anterior de $\mathcal{K}$ se anula, lo que se sigue de que D se anule sobre funciones, campos de vectores y 1-formas. $\square$

Proposición 3.2. *Sea $\varphi : V_1 \to V_2$ un isomorfismo de espacios vectoriales. Entonces φ induce un isomorfismo $\tilde{\varphi} : \mathfrak{T}(V_1) \to \mathfrak{T}(V_2)$ que preserva el tipo de los tensores y conmuta con las contracciones.*

Demostración. Sea $\varphi : V_1 \to V_2$ un isomorfismo de espacios vectoriales y sea $\varphi^* : V_2^* \to V_1^*$ el isomorfismo inducido entre los espacios duales dado por $(\varphi^* \mathbf{v}_2^*) : \mathbf{v} \in V_1 \mapsto \mathbf{v}_2^*(\varphi(\mathbf{v}))$, para cada $\mathbf{v}_2^* \in V_2^*$. Considerando el isomorfismo inverso $(\varphi^*)^{-1} : V_1^* \to V_2^*$, se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi \otimes (\varphi^*)^{-1} : V_1 \otimes V_1^* &\to V_2 \otimes V_2^* \\ \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}^* &\mapsto \varphi(\mathbf{u}) \otimes (\varphi^*)^{-1}\mathbf{v}^* \end{aligned}$$

es un isomorfismo a partir del cual se obtiene el isomorfismo buscado $\tilde{\varphi}$ entre los espacios de tensores. $\square$

Recordemos que si F es una transformación de M, la aplicación lineal tangente F_* induce un isomorfismo entre los espacios vectoriales tangentes $T_{F^{-1}(p)}M$ y T_pM. La Proposición 3.2 garantiza que podemos extender el isomorfismo F_* a un isomorfismo de las álgebras de tensores $\mathfrak{T}(T_{F^{-1}(p)}M)$ y $\mathfrak{T}(T_pM)$, que denotaremos por $\widetilde{F}_*$. Así, $\widetilde{F}$ es una transformación en el espacio de campos de tensores $\mathfrak{T}(TM)$ que preserva el tipo, i.e., si $\mathcal{K}$ es de tipo (r,s) entonces también lo es $\tilde{F}\mathcal{K}$, y que a cada campo de tensores $\mathcal{K}$ le asocia un campo de tensores $\tilde{F}\mathcal{K}$ determinado en cada punto por $(\widetilde{F}\mathcal{K})_p = \widetilde{F}_*(\mathcal{K}_{F^{-1}(p)})$.

De este modo, para extender la definición de la derivada de Lie a campos de tensores podemos proceder de manera análoga a como hicimos para campos de vectores. Fijado un campo de vectores X sobre M con grupo 1-paramétrico de transformaciones Φ_t, para cada valor de t consideramos el automorfismo $\widetilde{\Phi}_t$ del álgebra $\mathfrak{T}(TM)$.

Definición 3.3. (**Derivada de Lie de campos de tensores**)
Sea X un campo de vectores sobre M. Para cada campo de tensores $\mathcal{K}$ definimos la *derivada de Lie de* $\mathcal{K}$ *con respecto* X como

$$(\mathcal{L}_X\mathcal{K})_p = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[\mathcal{K}_p - (\widetilde{\Phi}_t\mathcal{K})_p\right]$$

donde Φ_t es el grupo 1-paramétrico de transformaciones de M asociado a X.

Observación 3.4. Sea X un campo de vectores no nulo en M. Sea $(\mathcal{U},(x^1,\dots,x^n))$ un entorno coordenado donde $X = \partial_{x^1}$ y, por tanto, el flujo local $\Phi_t(x^1,x^2,\dots,x^n) = (x^1 + t, x^2,\dots,x^n)$. Sea $\mathcal{K}$ un campo de tensores tipo (r,s) que expresamos en la coordenadas $(\mathcal{U},(x^1,\dots,x^n))$ como

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_{j_1,\dots,j_s}{}^{i_1,\dots,i_r}\ \partial_{x^{i_1}} \otimes \dots \partial_{x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s}.$$

El campo de tensores $\tilde{\Phi}_t\mathcal{K}$ viene dado por

$$\tilde{\Phi}_t\mathcal{K} = \tilde{\mathcal{K}}_{j_1,\dots,j_s}{}^{i_1,\dots,i_r}\ \partial_{x^{i_1}} \otimes \dots \partial_{x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s}.$$

Donde las funciones componentes

$$\tilde{\mathcal{K}}_{j_1,\dots,j_s}{}^{i_1,\dots,i_r}(x^1,x^2,\dots,x^n) = \mathcal{K}_{j_1,\dots,j_s}{}^{i_1,\dots,i_r}(x^1 - t, x^2,\dots,x^n).$$

Por tanto $\mathcal{L}_X\mathcal{K} = \widehat{\mathcal{K}}_{j_1,\dots,j_s}{}^{i_1,\dots,i_r}\ \partial_{x^{i_1}} \otimes \dots \partial_{x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s}$, donde

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{K}}_{j_1,\dots,j_s}{}^{i_1,\dots,i_r} &= \lim\nolimits_{t\to 0} \tfrac{1}{t}\left[\mathcal{K}_{j_1,\dots,j_s}{}^{i_1,\dots,i_r}(x^1,\dots,x^n) - \mathcal{K}_{j_1,\dots,j_s}{}^{i_1,\dots,i_r}(x^1 - t,\dots,x^n)\right] \\
&= \partial_{x^1}\mathcal{K}_{j_1,\dots,j_s}{}^{i_1,\dots,i_r}
\end{aligned}$$

por lo que

$$\mathcal{L}_X\mathcal{K} = \partial_{x^1}\mathcal{K}_{j_1,\dots,j_s}{}^{i_1,\dots,i_r}\ \partial_{x^{i_1}} \otimes \dots \partial_{x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s}.$$

Proposición 3.5. [1, Proposition 3.2] *La derivada de Lie* $\mathcal{L}_X : \mathfrak{T}(TM) \to \mathfrak{T}(TM)$ *es una derivación en* $\mathfrak{T}(TM)$ *y está caracterizada por* $\mathcal{L}_X f = Xf$ *para toda función* $f \in \mathcal{F}(M)$ *y* $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$ *para todo campo de vectores* Y *en* M.

Demostración. Veamos en primer lugar que $\mathcal{L}_X : \mathfrak{T}(TM) \to \mathfrak{T}(TM)$ es un operador lineal. Sean $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}' \in \mathfrak{T}(TM)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Para el campo de tensores $\alpha\mathcal{K} + \beta\mathcal{K}'$, utilizando la linealidad de las transformaciones $\widetilde{\Phi}_t$, se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(\alpha\mathcal{K} + \beta\mathcal{K}')_p &= \text{lím}_{t\to 0} \tfrac{1}{t}[(\alpha\mathcal{K} + \beta\mathcal{K}')_p - (\widetilde{\Phi}_t(\alpha\mathcal{K} + \beta\mathcal{K}'))_p))] \\ &= \text{lím}_{t\to 0} \tfrac{1}{t}\alpha[\mathcal{K}_p + (\widetilde{\Phi}_t\mathcal{K})_p] + \text{lím}_{t\to 0} \tfrac{1}{t}\beta[\mathcal{K}'_p + (\widetilde{\Phi}_t\mathcal{K}')_p] \\ &= \alpha\mathcal{L}_X\mathcal{K}_p + \beta\mathcal{L}_X\mathcal{K}'_p, \end{aligned}$$

lo que muestra que $\mathcal{L}_X$ es lineal.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(\mathcal{K} \otimes \mathcal{K}') &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[\mathcal{K} \otimes \mathcal{K}' - \widetilde{\Phi}_t(\mathcal{K} \otimes \mathcal{K}')] \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[\mathcal{K} \otimes \mathcal{K}' - (\widetilde{\Phi}_t\mathcal{K}) \otimes (\widetilde{\Phi}_t\mathcal{K}')] \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[\mathcal{K} \otimes \mathcal{K}' - (\widetilde{\Phi}_t\mathcal{K}) \otimes \mathcal{K}'] + \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[(\widetilde{\Phi}_t\mathcal{K}) \otimes \mathcal{K}' - (\widetilde{\Phi}_t\mathcal{K}) \otimes (\widetilde{\Phi}_t\mathcal{K}')] \\ &= (\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[\mathcal{K} - (\widetilde{\Phi}_t\mathcal{K})]) \otimes \mathcal{K}' + \lim_{t\to 0}(\widetilde{\Phi}_t\mathcal{K}) \otimes (\frac{1}{t}[\mathcal{K}' - (\widetilde{\Phi}_t\mathcal{K}')]) \\ &= (\mathcal{L}_X\mathcal{K}) \otimes \mathcal{K}' + \mathcal{K} \otimes (\mathcal{L}_X\mathcal{K}'). \end{aligned}$$

Dado que $\widetilde{\Phi}_t$ preserva el tipo y conmuta con las contracciones (según se ha mostrado en la Proposición 3.2), así lo hace $\mathcal{L}_X$. De hecho,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(C_i^j\mathcal{K}) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[C_i^j\mathcal{K} - \widetilde{\Phi}_t(C_i^j\mathcal{K})] = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[C_i^j\mathcal{K} - C_i^j\widetilde{\Phi}_t\mathcal{K})]) \\ &= C_i^j \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[\mathcal{K} - \widetilde{\Phi}_t\mathcal{K}] = C_i^j(\mathcal{L}_X\mathcal{K}). \end{aligned}$$

Finalmente, la acción de la derivada de Lie sobre campos de vectores, $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$ fue probada en la Proposición 2.2 y la acción sobre funciones $f \in \mathcal{F}(M)$ viene dada por

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X f)(p) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[f(p) - f(\Phi_t^{-1}p)] \\ &= -\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[f(\Phi_t^{-1}p) - f(p)]. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\Phi_t^{-1} = \Phi_{-t}$ es un grupo 1-paramétrico de transformaciones locales generado por $-X$, tenemos que $\mathcal{L}_X f = -(-X)f = Xf$. □

Proposición 3.6. *Sea $\mathcal{K}$ un campo de tensores de tipo $(1,s)$ sobre M. Entonces*

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X\mathcal{K})(Y_1,\ldots,Y_s) &= \mathcal{L}_X\,\mathcal{K}(Y_1,\ldots,Y_s)-\sum_{i=1}^{s}\mathcal{K}(Y_1,\ldots,\mathcal{L}_XY_i,\ldots,Y_s)\\ &= [X,\mathcal{K}(Y_1,\ldots,Y_s)]-\sum_{i=1}^{s}\mathcal{K}(Y_1,\ldots,[X,Y_i],\ldots,Y_s)\end{aligned}$$

para cualesquiera X, $Y_1,\ldots,Y_s$ campos de vectores sobre M.

Demostración. Si interpretamos el campo de vectores $\mathcal{K}(Y_1,\ldots,Y_s)\in\mathcal{F}(M)$ como el resultado de aplicar las contracciones $C_1,\ldots,C_s$ al tensor $Y_1\otimes\cdots\otimes Y_s\otimes\mathcal{K}$, entonces para cualquier derivación sobre $\mathfrak{T}(TM)$ se tiene

$$\begin{aligned}D(\mathcal{K}(Y_1,\ldots,Y_s)) &= D(C_1\ldots C_s(Y_1\otimes\cdots\otimes Y_s\otimes\mathcal{K}))\\ &= C_1\ldots C_s(D(Y_1\otimes\cdots\otimes Y_s\otimes\mathcal{K}))\\ &= C_1\ldots C_s(Y_1\otimes\cdots\otimes Y_s\otimes D(\mathcal{K}))+C_1\ldots C_s(D(Y_1\otimes\cdots\otimes Y_s)\otimes\mathcal{K})\\ &= (D(\mathcal{K}))(Y_1,\ldots,Y_s)+\sum_{i=1}^{s}\mathcal{K}(Y_1,\ldots,DY_i,\ldots,Y_s)\end{aligned}$$

Ahora, si $D=\mathcal{L}_X$, entonces por la Proposición 2.2 se tiene el resultado. □

Observación 3.7. La expresión de la derivada de Lie en la proposición anterior sigue siendo válida para campos de tensores $\mathcal{K}$ de tipo $(0,s)$ sin más que tener en cuenta que $\mathcal{L}_X\mathcal{K}(Y_1,\ldots,Y_s)=X\mathcal{K}(Y_1,\ldots,Y_s)$ por ser $\mathcal{K}(Y_1,\ldots,Y_s)\in\mathcal{F}(M)$. Así

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X\mathcal{K})(Y_1,\ldots,Y_s) &= X\,\mathcal{K}(Y_1,\ldots,Y_s)-\sum_{i=1}^{s}\mathcal{K}(Y_1,\ldots,\mathcal{L}_XY_i,\ldots,Y_s)\\ &= X\,\mathcal{K}(Y_1,\ldots,Y_s)-\sum_{i=1}^{s}\mathcal{K}(Y_1,\ldots,[X,Y_i],\ldots,Y_s)\end{aligned}$$

para cualesquiera X, $Y_1,\ldots,Y_s$ campos de vectores sobre M.

3.1. Caracterización de la derivada de Lie como derivación

La derivada de Lie no solo proporciona una derivación en el álgebra de campos de tensores $\mathfrak{T}(TM)$ sino que toda derivación de dicha álgebra puede descomponerse como suma de una cierta derivada de Lie junto con un campo de tensores de tipo $(1,1)$.

Sea S un campo de tensores de tipo $(1,1)$ sobre M. Así $S_p : T_pM\to T_pM$ es un endomorfismo del espacio tangente en cada punto $p\in M$, por lo que se puede extender a un endomorfismo de $\mathfrak{T}(TM)$ sin más que considerar en cada punto el endomorfismo asociado $\widetilde{S}_p:\mathfrak{T}(T_pM)\to\mathfrak{T}(T_pM)$.

Proposición 3.8. [1, Proposition 3.3] *Toda derivación* $D \in \mathfrak{T}(TM)$ *se puede descomponer de manera única como sigue:*

$$D = \mathcal{L}_X + S$$

donde X *es un campo de vectores y* S *es un campo tensorial de tipo* $(1,1)$.

Demostración. Por ser D una derivación de $\mathfrak{T}(TM)$ entonces preserva el tipo (r,s) de los distintos campos de tensores. En particular actúa como derivación tanto sobre funciones como sobre campos de vectores.

Dado que $D : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$ es una derivación, entonces el Teorema 1.2 asegura que existe un único campo de vectores X sobre M tal que $Df = Xf$ para cada $f \in \mathcal{F}(M)$. Ahora $D - \mathcal{L}_X$ verifica $(D - \mathcal{L}_X)f = Df - \mathcal{L}_X f = Df - Xf = 0$ y por tanto, denotando igualmente con S a la restricción del operador $(D - \mathcal{L}_X)$ al espacio de campos de vectores, se tiene

$$S(f\xi) = D(f\xi) - \mathcal{L}_X(f\xi) = fD\xi - f\mathcal{L}_X\xi = f(D - \mathcal{L}_X)\xi = fS(\xi),$$

de donde se sigue que S es un campo de tensores de tipo $(1,1)$ sobre M, de donde se sigue el resultado. La unicidad en la descomposición se corresponde con la correspondencia biyectiva entre derivaciones de funciones y campos de vectores en la variedad. $\square$

Capítulo 4

Transformaciones infinitesimales

Sea $\mathcal{K}$ un campo de tensores sobre una variedad M. Diremos que un campo de vectores X sobre M es una *transformación infinitesimal para* $\mathcal{K}$ si el campo de tensores $\mathcal{K}$ es invariante por el grupo 1-paramétrico de transformaciones de X, esto es si $\widetilde{\Phi}_t\mathcal{K} = \mathcal{K}$.

Teniendo en cuenta la definición de la derivada de Lie, $\mathcal{L}_X\mathcal{K} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[\mathcal{K} - \widetilde{\Phi}_t\mathcal{K}]$, se sigue de forma inmediata que si X es una transformación infinitesimal de $\mathcal{K}$ entonces $\mathcal{L}_X\mathcal{K} = 0$. El objetivo de este capítulo es probar el resultado recíproco, con lo que se obtiene la siguiente caracterización de las transformaciones infinitesmales.

Teorema 4.1. *Un campo de tensores $\mathcal{K}$ es invariante por un grupo 1-paramétrico de transformaciones Φ_t si y solo si $\mathcal{L}_X\mathcal{K} = 0$, donde X es el campo de vectores asociado a Φ_t.*

Sea Φ_t el flujo 1-paramétrico asociado a X y sean $\widetilde{\Phi}_t$ los endomorfimos inducidos en el álgebra de campos de tensores. Sea $\mathcal{K}$ un campo de tensores y consideremos la familia 1-paramétrica de campos de tensores $\widetilde{\Phi}_t\mathcal{K}$. Como $\widetilde{\Phi}_0\mathcal{K} = \mathcal{K}$, si vemos que la aplicación $t \mapsto \widetilde{\Phi}_t\mathcal{K}$ es constante entonces ya se tendrá que $\mathcal{K}$ es invariante por Φ_t. Si $\mathcal{L}_X\mathcal{K} = 0$, entonces el Lema 4.3 muestra que se anula la derivada $\frac{d}{dt}\widetilde{\Phi}_t\mathcal{K} \mid_{t=s} = 0$ para cualquier valor de s, por lo que la función $\widetilde{\Phi}_t\mathcal{K}$ será constante y X una transformación infinitesimal.

Observación 4.2. Sea X un campo de vectores no nulo en M y sea $(\mathcal{U}, (x^1, \ldots, x^n))$ un sistema de coordenadas locales donde $X = \partial_{x^1}$. Sea $\mathcal{K}$ un campo de tensores de tipo (r, s) sobre M. Según se mostró en la Observación 3.4

$$\mathcal{L}_X\mathcal{K} = \partial_{x^1}\mathcal{K}_{j_1,\ldots,j_s}{}^{i_1,\ldots,i_r}\ \partial_{x^{i_1}} \otimes \ldots \partial_{x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s}.$$

Así pues, X es una transformación infinitesimal de $\mathcal{K}$ si y solo si $\partial_{x^1}\mathcal{K}_{j_1,\ldots,j_s}{}^{i_1,\ldots,i_r} = 0$, de donde se sigue que .$^{\text{el}}$ campo de tensores $\mathcal{K}$ es constante respecto a la coordenada correspondiente a X".

Lema 4.3. *Sea Φ_t un grupo 1-paramétrico de tranformaciones locales generado por un campo de vectores X. Sea $\mathcal{K}$ un campo de tensores. Entonces se tiene*

$$\widetilde{\Phi}_s(\mathcal{L}_X\mathcal{K}) = -\frac{d(\widetilde{\Phi}_t\mathcal{K})}{dt} \mid_{t=s} .$$

para cualquier valor del parámetro s.

Demostración. Fijemos un valor de s para el que está definido el flujo local Φ del campo de vectores X. Teniendo en cuenta la expresión de la derivada de Lie de un campo de tensores, $\mathcal{L}_X\mathcal{K} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[\mathcal{K} - \widetilde{\Phi}_t\mathcal{K}]$, para cada campo de tensores $\widetilde{\Phi}_s\mathcal{K}$ generado por el flujo de X se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X(\widetilde{\Phi}_s\mathcal{K}) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[\widetilde{\Phi}_s\mathcal{K} - \widetilde{\Phi}_t(\widetilde{\Phi}_s\mathcal{K})] \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[\widetilde{\Phi}_s\mathcal{K} - \widetilde{\Phi}_{t+s}\mathcal{K}] \\
&= -\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[\widetilde{\Phi}_{t+s}\mathcal{K} - \widetilde{\Phi}_s\mathcal{K}] = -\frac{d}{dt}(\widetilde{\Phi}_t\mathcal{K}) \mid_{t=s} .
\end{aligned}$$

Veremos ahora que la derivada de Lie $\mathcal{L}_X$ conmuta con los endomorfimos $\widetilde{\Phi}_t$ asociados al grupo 1-paramétrico de X, i.e., $\widetilde{\Phi}_s(\mathcal{L}_X\mathcal{K}) = \mathcal{L}_X(\widetilde{\Phi}_s\mathcal{K})$ de donde se seguirá que

$$\widetilde{\Phi}_s(\mathcal{L}_X\mathcal{K}) = \mathcal{L}_X(\widetilde{\Phi}_s\mathcal{K}) = -\frac{d}{dt}(\widetilde{\Phi}_t\mathcal{K}) \mid_{t=s},$$

lo que prueba el resultado.

A continuación probaremos que $\widetilde{\Phi}_s(\mathcal{L}_X\mathcal{K}) = \mathcal{L}_X(\widetilde{\Phi}_s\mathcal{K})$, o equivalentemente

$$\mathcal{L}_X\mathcal{K} = (\widetilde{\Phi}_s^{-1} \circ \mathcal{L}_X \circ \widetilde{\Phi}_s)\mathcal{K} \tag{4.1}$$

para todo campo de tensores $\mathcal{K}$.

Teniendo en cuenta que $\mathcal{L}_X$ es una derivación y las aplicaciones $\widetilde{\Phi}_s$ preservan el producto tensor ($\widetilde{\Phi}_s(\mathcal{K}\otimes\mathcal{K}') = \widetilde{\Phi}_s(\mathcal{K})\otimes\mathcal{K}' + \mathcal{K}\otimes\widetilde{\Phi}_s(\mathcal{K}')$), se tiene que $(\widetilde{\Phi}_s^{-1}\circ\mathcal{L}_X\circ\widetilde{\Phi}_s)$ es una derivación. En virtud de la Proposición 3.1, la derivación $(\widetilde{\Phi}_s^{-1} \circ \mathcal{L}_X \circ \widetilde{\Phi}_s)$ estará completamente determinada por su actuación sobre funciones y campos de vectores, por lo que bastará comprobar que $(\widetilde{\Phi}_s^{-1}\circ\mathcal{L}_X\circ\widetilde{\Phi}_s)(f) = X(f)$ para cualquier $f \in \mathcal{F}(M)$ y $(\widetilde{\Phi}_s^{-1}\circ\mathcal{L}_X\circ\widetilde{\Phi}_s)(Y) = [X, Y]$ para cualquier campo de vectores Y sobre M para asegurar que $\mathcal{L}_X = \widetilde{\Phi}_s^{-1}\circ\mathcal{L}_X\circ\widetilde{\Phi}_s$.

Recordemos que para cada transformación Φ_s, como el campo de vectores X es invariante por su flujo, entonces la transformación inducida $\widetilde{\Phi}_s$ actúa sobre campos de vectores como

$$(\widetilde{\Phi}_s Y)_p = (\Phi_s)_* \mid_{\Phi_s^{-1}(p)} Y_{\Phi_s^{-1}(p)}, \quad \widetilde{\Phi}_s X = X.$$

Se sigue del Corolario 2.5 que para cada campo de vectores Y en M se cumple $\mathcal{L}_X Y = (\Phi_s)_*^{-1} \circ \mathcal{L}_X \circ (\Phi_s)_* Y$, por lo que ambas derivaciones coinciden sobre campos de vectores.

Si $f \in \mathcal{F}(M)$, entonces $\widetilde{\Phi}_s f = f \circ \Phi_s^{-1}$, de donde se sigue que

$$(\widetilde{\Phi}_s \mathcal{L}_X f)_p = (\widetilde{\Phi}_s X f)_p = X_{\Phi_s^{-1}(p)}(f)\,,$$

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X \widetilde{\Phi}_s f)_p &= X(\widetilde{\Phi}_s f)_p = X_p(f \circ \Phi_s^{-1}) \\ &= \widetilde{\Phi}_s X_{\Phi_s^{-1}(p)}(f \circ \Phi_s^{-1}) = X_{\Phi_s^{-1}(p)}(f \circ \Phi_s^{-1} \circ \circ \Phi_s) = X_{\Phi_s^{-1}(p)}(f)\end{aligned}$$

de donde se sigue el resultado. □

El conjunto de transformaciones infinitesimales de un campo de tensores $\mathcal{K}$ tiene una estructura de álgebra de Lie con el producto corchete de campos de vectores. Esto es consecuencia inmediata de la siguiente identidad.

Lema 4.4. [1, Proposition 3.4] *Para cualesquiera campos de vectores X e Y se verifica que*

$$\mathcal{L}_{[X,Y]} = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y].$$

Demostración. Sean X, Y campos de vectores en M. Para cada función $f \in \mathcal{F}(M)$ se tiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{[X,Y]}(f) &= [X,Y](f) = XY(f) - YX(f) \\ &= X[\mathcal{L}_Y(f)] - Y[\mathcal{L}_X(f)] \\ &= \mathcal{L}_X\mathcal{L}_Y(f) - \mathcal{L}_Y\mathcal{L}_X(f) = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y](f)\,.\end{aligned}$$

Además, si Z es otro campo de vectores en M, entonces se sigue de la identidad de Jacobi que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{[X,Y]}Z &= [[X,Y]],Z] = -[[Y,Z],X] - [[Z,X],Y] \\ &= [X,[Y,Z]] - [Y,[X,Z]] \\ &= \mathcal{L}_X[Y,Z] - \mathcal{L}_Y[X,Z] = \mathcal{L}_Y\mathcal{L}_X Z - \mathcal{L}_Y\mathcal{L}_X Z = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]Z\,.\end{aligned}$$

Como la composición de derivaciones es una derivación, se sigue que $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]$ es una derivación que coincide con $\mathcal{L}_{[X,Y]}$ actuando sobre funciones y sobre campos de vectores. En virtud de la Proposición 3.1, se tiene que ambas derivaciones coinciden, lo que prueba el resultado. □

Así pues, si X e Y son transformaciones infinitesimales de un campo de tensores $\mathcal{K}$, entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{[X,Y]}\mathcal{K} &= [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]\mathcal{K} \\ &= \mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y\mathcal{K}) - \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_K\mathcal{K}) = 0,\end{aligned}$$

por lo que $[X,Y]$ es asimismo una transformación infinitesimal de $\mathcal{K}$.

A continuación analizaremos algunos ejemplos de transformaciones infinitesimales que resultan de importancia en geometría de Riemann, geometría simpléctica y en el estudio de las estructuras casi-complejas.

4.1. Transformaciones infinitesimales de un tensor métrico: campos de vectores de Killing

Sea (M,g) una variedad de Riemann. Una transformación infinitesimal del tensor métrico g es un campo de vectores X verificando $\mathcal{L}_X g = 0$, donde

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X g)(Y,Z) &= \mathcal{L}_X g(Y,Z) - g(\mathcal{L}_X Y, Z) - g(Y, \mathcal{L}_X Z) \\ &= Xg(Y,X) - g([X,Y],Z) - g(Y,[X,Z])\,,\end{aligned}$$

para cualesquiera campos de vectores X, Y sobre M.

Las transformaciones infinitesimales de g reciben el nombre de *campos de vectores de Killing* y, de acuerdo con la Observación 4.2 representan las direcciones en las que el tensor métrico es constante. El álgebra de los campos de vectores de Killing sobre una variedad de Riemann es de dimensión finita $\leq \frac{1}{2}n(n+1)$, donde $n = \dim M$. Además la dimensión máxima en dicho álgebra se alcanza tan solo si (M,g) es localmente isométrica a una esfera, el espacio euclídeo o el espacio hiperbólico [1], si bien este estudio se escapa de los objetivos del trabajo.

4.2. Transformaciones infinitesimales de una estructura casi compleja: campos de vectores holomorfos

Sea (M,J) una variedad casi compleja. Una transformación infinitesimal de la estructura casi compleja J es un campo de vectores X tal que $(\mathcal{L}_X J)(Y) = \mathcal{L}_X JY - J(\mathcal{L}_X Y)$, i.e.,

$$[X, JY] = J[X,Y]$$

para todo campo de vectores Y en M. Equivalentemente el flujo local de M está dado por transformaciones casi complejas, es decir $(\Phi_t)_* J = J(\Phi_t)_*$ para cada t.

Es importante señalar que si X es una transformación infinitesimal de J, entonces el campo de vectores JX no es necesariamente una transformación infinitesimal de J. De hecho, eso sucedería si

$$[JX, JY] = J[JX, Y]$$

para todo campo de vectores Y en M.

La anulación del *tensor de Nijenhuis*

$$N_J(Y,Z) = [JY, JZ] - J[JY, Z] - J[Y, JZ] - [Y,Z]$$

es una condición suficiente para que el álgebra de transformaciones infinitesimales sea estable bajo la acción de la estructura J, que es compleja en esta situación (ver [2]). En tal caso dicha álgebra es compleja y posiblemente de dimensión infinita.

4.3. Transformaciones infinitesimales de una estructura simpléctica: campos de vectores Hamiltonianos

Una transformación infinitesimal de una variedad simpléctica (M, Ω) es un campo de vectores X en M tal que $\mathcal{L}_X\Omega = 0$, donde

$$(\mathcal{L}_X\Omega)(Y, Z) \quad = \quad X\Omega(Y, Z) - \Omega([X, Y], Z) - \Omega(Y, [X, Z]).$$

Teniendo en cuenta la relación entre la diferencial exterior y la diferencial interior dada por $\mathcal{L}_X\Omega = d\iota_X\Omega + \iota_X d\Omega$ (véase Teorema 5.5), al ser la 2-forma Ω cerrada, entonces $d\iota_X\Omega = 0$. En consecuencia $\iota_X\Omega$ es una 1-forma cerrada y, en virtud del Lema de Poincarè (ver, por ejemplo [4, Theorem 11.11]) es localmente exacta, por lo que existe una función f localmente definida sobre M de forma que $\iota_X\Omega = df$.

Invirtiendo la discusión anterior, para cada 1-forma θ en M definimos un campo de vectores X por $\iota_X\Omega = \theta$ y se tiene entonces que si $d\theta = d\Omega = 0$, entonces $\mathcal{L}_X\Omega = 0$. Por tanto existe una equivalencia entre el álgebra de transformaciones infinitesimales simplécticas y el espacio de 1-formas cerradas, por lo que dicha álgebra tiene dimensión infinita (ver, emplo [6]).

Un *sistema Hamiltoniano* en una variedad simpléctica (M, Ω) es un campo de vectores X para el que la diferencial interior $\iota_X\Omega$ es una 1-forma cerrada y, por tanto, una transformación infinitesimal simpléctica. Un *Hamiltoniano* del sistema X es una función f definida sobre M tal que $df = \iota_X\Omega$.

Capítulo 5

Caracterización de la derivada de Lie de formas diferenciales

Como se vió en la Proposición 3.5, la derivada de Lie es una derivación en el álgebra de campos de tensores caracterizada por su acción sobre funciones y campos de vectores por $\mathcal{L}_X f = X(f)$ y $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$.

En este capítulo estudiaremos la derivada de Lie como una derivación en el espacio de formas diferenciales, mostrando que es la única derivación de grado cero en dicho espacio que conmuta con la diferencial exterior (Teorema 5.4).

Además, mostraremos que toda derivación en el álgebra de campos de tensores se descompone de forma única como la derivada de Lie asociada a un campo de vectores y un campo de tensores de tipo $(1, 1)$.

5.1. Derivaciones en el álgebra de formas diferenciales

En el capítulo anterior hemos estudiado la derivada de Lie como derivación en el espacio de campos de tensores sobre una variedad.

El producto tensor induce de forma natural un producto en el espacio de formas, por lo que en esta sección estudiaremos el comportamiento de la derivada de Lie como derivación en dicho espacio. Tras recordar algunos conceptos básicos de formas diferenciales haremos especial énfasis en dos derivaciones: la diferencial exterior y la diferencial interior, para posteriormente relacionarlas con la derivada de Lie.

Recordemos que una k-forma en un espacio vectorial V es un tensor de tipo $(0, k)$ sobre V totalmente antisimétrico, i.e., una aplicación $\omega : V \times \overset{k}{\ldots} \times V \to \mathbb{R}$ verificando

$$\omega(X_{\pi(1)}, \ldots, X_{\pi(r)}) = \epsilon(\pi)\omega(X_1, \ldots, X_r))$$

donde π es una permutación arbitraria de $(1, 2, \ldots, r)$ y

$$\epsilon(\pi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi \text{ es par}, \\ -1 & \text{si } \pi \text{ es impar}, \\ 0 & \text{si dos índices coinciden.} \end{cases}$$

Denotando con $\Lambda^k(V)$ el espacio de las k-formas sobre V, se tiene de forma inmediata que $\Lambda^1(V) = V^*$.

La alternación del producto tensor define un producto en el espacio de formas $\Lambda(V) = \bigcup_{k\geq 1} \Lambda^k(V)$ definido por

$$\begin{aligned} \wedge : \Lambda^r(V) \times \Lambda^s(V) &\rightarrow \Lambda^{r+s}(V) \\ (\omega, \eta) &\mapsto \omega \wedge \eta \end{aligned}$$

determinado por

$$(\omega \wedge \eta)(v_1, \ldots, v_{r+s}) = \frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{G}_{r+s}} \epsilon(\sigma)\omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(r)})\, \eta(v_{\sigma(r+1)}, \ldots, v_{\sigma(r+s)}),$$

donde $\mathfrak{G}_{r+s}$ denota las permutaciones de $(r+s)$-elementos. Se sigue que el producto '$\wedge$' da lugar a una estructura de álgebra en el espacio de formas sobre V, de tal forma que si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V, entonces $\{v^{i_1} \wedge \cdots \wedge v^{i_k}, i_1 < \cdots < i_k\}$ determina una base de $\Lambda^k(V)$.

Generalizando el concepto de forma en un espacio vectorial, un *campo de k-formas* (o simplemente una *k-forma*) en una variedad diferenciable es una sección del fibrado $\Lambda^k(TM)$

$$\begin{aligned} \omega : &M \rightarrow \Lambda^k(TM) \\ &p \mapsto \omega_p \in \Lambda^k(T_pM). \end{aligned}$$

Diremos que una k-forma ω es diferenciable si actúa sobre campos de vectores diferenciables generando funciones diferenciables en la variedad, o equivalentente si sus componentes en cualquier sistema coordenado $(\mathcal{U}, (x^1, \ldots, x^n))$,

$$\omega = \omega_{i_1,\ldots,i_k}\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k},$$

vienen dadas por funciones diferenciables $\omega_{i_1,\ldots,i_k} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$.

Dado que el espacio de formas es un álgebra graduada, consideraremos derivaciones del mismo y su relación con el grado de las formas consideradas.

Definición 5.1. Sea M una variedad diferenciable y $\Lambda(TM)$ el espacio de formas diferenciales sobre M. Una *derivación de grado k* es un operador lineal en $\Lambda(TM)$ verificando las dos propiedades

(i) D verifica una regla de Leibniz: $D(\omega \wedge \eta) = (D\omega) \wedge \eta + \omega \wedge (D\eta)$, para cualesquiera $\omega, \eta \in \Lambda(TM)$, y

(ii) D transforma r-formas en $(r+k)$-formas, i.e., $D : \Lambda^r(TM) \to \Lambda^{r+k}(TM)$.

Si, en lugar de la condición (i), el operador $D : \Lambda^r(TM) \to \Lambda^{r+k}(TM)$ verifica:

(i') $D(\omega \wedge \mu) = (D\omega) \wedge \mu + (-1)^r \omega \wedge (D\mu)$ para cualesquiera $\omega, \eta \in \Lambda(TM)$,

entonces diremos que es una *antiderivación de grado k*.

Las derivaciones y antiderivaciones en $\Lambda(TM)$ están caracterizadas por su acción sobre funciones y 1-formas.

Proposición 5.2. *Una derivación o una antiderivación D queda completamente determinada por su efecto sobre funciones $f \in \mathcal{F}(M)$ y 1-formas $\omega \in \Lambda^1(TM)$.*

A continuación veremos dos ejemplos conocidos de antiderivaciones de grados 1 y -1 que desempeñarán un papel importante en esta sección.

La diferencial exterior

Llamamos *diferencial exterior* a la antiderivación de grado uno que transforma una r-forma $\omega = \omega_{i_1,\ldots,i_k}\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$ en la $(r+1)$-forma $d\omega = d\omega_{i_1,\ldots,i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$.

El siguiente resultado nos muestra una caracterización de la diferencial exterior.

Teorema 5.3. [4, Theorem 9.12] *Dada una variedad diferenciable M, existe una única antiderivación de grado uno; $\boldsymbol{d} : \Lambda^r(TM) \to \Lambda^{r+1}(TM)$ verificando:*

(a) $\boldsymbol{d}f = df$ *para cada* $f \in \mathcal{F}(M)$

(b) $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{d}\omega) = 0$ *para cada* $\omega \in \Lambda^k(TM)$.

Tal derivación recibe el nombre de *diferencial exterior*.

El objetivo de este capítulo es probar el siguiente resultado [1, Proposition 3.9]

Teorema 5.4. *Para cada campo de vectores X en M, la derivada de Lie $\mathcal{L}_X$ es una derivación de $\Lambda(TM)$ de grado cero que conmuta con la diferencial exterior.*

Recíprocamente, cualquier derivación de $\Lambda(TM)$ de grado cero que conmuta con la diferencial exterior es la derivada de Lie asociada a algún campo de vectores sobre M.

Demostración. Dado que el producto '$\wedge$' está dado como la alternancia del producto tensor '$\otimes$' y, dado que $\mathcal{L}_X$ es una derivación del álgebra tensorial, veremos que $\mathcal{L}_X$ conmuta con el operador de alternancia, de donde se seguirá que la derivada de Lie verifica (i) en la Definición 5.1.

Se sigue de la Observación 3.7 que para cada r-forma ω,

$$(\mathcal{L}_X\omega)(Y_1,\ldots,Y_r) = X(\omega(Y_1,\ldots,Y_r)) - \sum_i \omega(Y_1,\ldots,[X,Y_i],\ldots,Y_r),$$

para cualesquiera campos de vectores $Y_1,\ldots,Y_r$ en M. Así, para cada ω y $\eta \in \Lambda(TM)$, se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X(\omega\wedge\eta) = \mathcal{L}_X(A(\omega\otimes\eta)) &= A(\mathcal{L}_X(\omega\otimes\eta))\\ &= A(\mathcal{L}_X\omega\otimes\eta) + A(\omega\otimes\mathcal{L}_X\eta)\\ &= \mathcal{L}_X\omega\wedge\eta + \omega\wedge\mathcal{L}_X\eta.\end{aligned}$$

Para probar que $\mathcal{L}_X$ conmuta con $\mathbf{d}$, observamos primero que para cualquier transformación Φ de M, $\widetilde{\Phi}\omega = (\Phi^{-1})^*\omega$ y así, $\widetilde{\Phi}$ conmuta con $\mathbf{d}$. Sea Φ_t el grupo 1-paramétrico de transformaciones locales generado por X. Dado que $\widetilde{\Phi}_t(\mathbf{d}\omega) = \mathbf{d}(\widetilde{\Phi}_t\omega)$ y de la definición de $\mathcal{L}_X\omega$ se sigue la igualdad $\mathcal{L}_X(\mathbf{d}\omega) = \mathbf{d}(\mathcal{L}_X\omega)$ para cada $\omega \in \Lambda(TM)$.

Recíprocamente, sea D una derivación de grado 0 sobre $\Lambda(TM)$ que conmuta con la diferencial exterior $\mathbf{d}$. Dado que D da lugar a una derivación en el espacio de funciones $\mathcal{F}(M)$, procediendo como en la Proposición 3.8, eixste un único campo de vectores X en M tal que $Df = Xf$ para toda $f \in \mathcal{F}(M)$. Sea $D' = D - \mathcal{L}_X$. Entonces $D'f = 0$ para toda función $f \in \mathcal{F}(M)$ y, por tanto, D' es una derivación sobre $\Lambda(TM)$.

En virtud de la Proposición 5.2, para probar que $D' = 0$ basta con probar que $D'\omega = 0$ para toda 1-forma ω. Teniendo en cuenta que D' es un operador local, es suficiente probar que $D'\omega = 0$ cuando ω es de la forma $f\,\mathbf{d}h$ para funciones $f, h \in \mathcal{F}(M)$. Dado que D y $\mathcal{L}_X$ conmutan con la diferencial exterior entonces también lo hace D' y, teniendo en cuenta que $D'f = 0$, se tiene que $D'f\mathbf{d}h = fD'\mathbf{d}h = \mathbf{d}D'h = 0$. Dado que D' se anula al actuar sobre funciones y 1-formas, entonces ha de ser $D' = 0$, lo que prueba que $D = \mathcal{L}_X$. □

La diferencial interior

Sea X un campo de vectores en M. La aplicación $\iota_X : \Lambda^k(TM) \to \Lambda^{k-1}(TM)$ determinada por

$$(\iota_X\omega)(X_2,\ldots,X_k) = \omega(X, X_2,\ldots,X_k)$$

para cualesquiera campos de vectores $X_2,\ldots,X_k$ sobre M, define una antiderivación de grado -1 que llamaremos *diferencial interior*.

En efecto, ι_X verifica la condición (i') pues para $\omega \in \Lambda^r$, $\eta \in \Lambda^s$ y X un campo de vectores en M, se tiene

$$\begin{aligned}
\iota_X(\omega \wedge \eta)(X_2, \dots, X_{r+s}) &= (\omega \wedge \eta)(X, X_2, \dots, X_{r+s}) \\
&= \frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{r+s}} \epsilon(\sigma)\omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)})\, \eta(v_{\sigma(r+1)}, \dots, v_{\sigma(r+s)}) \\
&= \frac{1}{r!s!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{(r-1)+s}} \epsilon(\tau)\omega(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(r)})\, \eta(v_{\tau(r+1)}, \dots, v_{\tau(r+s)}) + \\
\frac{1}{r!s!} &\sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{r+(s-1)}} \epsilon(\tau)\omega(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(r)})\, \eta(v_{\tau(r+1)}, \dots, v_{\tau(r+s)})) \\
&= \iota_X(\omega) \wedge \eta(X_2, \dots, X_{r+s}) + (-1)^r \omega \wedge \iota_X(\eta)(X_2, \dots, X_{r+s})
\end{aligned}$$

en donde en el segundo sumando aparece multiplicando a $(-1)^r$ pues para colocar $(r+1)$ en la primera posición son necesarios r movimientos.

Interpretando las funciones como formas de grado cero, se define $\iota_X f = 0$ para toda $f \in \mathfrak{X}(M)$.

El objetivo final de esta sección será obtener la siguiente identidad que mide la falta de anti-conmutatividad entre la diferencial exterior y la diferencial interior en términos de la derivada de Lie.

Teorema 5.5. *Sea X un campo de vectores en M. Entonces se verifica*

(i) $\mathcal{L}_X = d \circ \iota_X + \iota_X \circ d$

(ii) $[\mathcal{L}_X, \iota_Y] = \iota_{[X,Y]}$

para cualquier campo de vectores Y sobre M.

Demostración. Por ser $\mathbf{d}$ y ι_X antiderivaciones de grados 1 y -1 respectivamente, entonces $\mathbf{d} \circ \iota_X + \iota_X \circ \mathbf{d}$ es una derivación de grado 0.

Además $\mathbf{d} \circ \iota_X + \iota_X \circ \mathbf{d}$ conmuta con la diferencial exterior, ya que

$$\mathbf{d} \circ (\mathbf{d} \circ \iota_X + \iota_X \circ \mathbf{d}) - (\mathbf{d} \circ \iota_X + \iota_X \circ \mathbf{d}) \circ \mathbf{d} = \mathbf{d} \circ \iota_X \circ \mathbf{d} - \mathbf{d} \circ \iota_X \circ \mathbf{d} = 0,$$

pues $\mathbf{d}^2 = 0$. En consecuencia, el Teorema 5.4 muestra que existe un campo de vectores ξ sobre M de forma que $\mathcal{L}_\xi = \mathbf{d} \circ \iota_X + \iota_X \circ \mathbf{d}$. Veremos a continuación que $\xi = X$. Para cada función $f \in \mathcal{F}(M)$ se tiene

$$(\mathbf{d} \circ \iota_X + \iota_X \circ \mathbf{d})(f) = \iota_X \circ \mathbf{d}(f) = df(X), \quad \mathcal{L}_\xi f = df(\xi),$$

de donde se sigue que $\xi = X$, lo que prueba (i).

Para probar (ii), basta observar que $[\mathcal{L}_X, \iota_Y] = \mathcal{L}_X \circ \iota_Y - \iota_Y \circ \mathcal{L}_X$ es una antiderivación de grado -1 y que tanto $[\mathcal{L}_X, \iota_Y]$ como $\iota_{[X,Y]}$ se anulan sobre $\mathcal{F}(M)$. Por la Proposición 5.2 sólo resta ver que ambas antiderivaciones actúan igual sobre cada 1-forma ω. Así,

$$\begin{aligned}
[\mathcal{L}_X, \iota_Y]\omega &= \mathcal{L}_X \circ \iota_Y(\omega) - \iota_Y \circ \mathcal{L}_X\omega \\
&= \mathcal{L}_X\omega(Y) - (\mathcal{L}_X\omega)(Y) \\
&= X\omega(Y) - X\omega(Y) + \omega([X,Y]) = \omega([X,Y]) = \iota_{[X,Y]}\omega \,,
\end{aligned}$$

de donde se sigue el resultado. $\square$

Capítulo 6

Derivación covariante

La derivación de Lie se obtiene a partir de la identificación de espacios tangentes por medio del flujo de un campo de tensores. Existe otro mecanismo de identificación de espacios tangentes dado por el transporte paralelo asociado a una conexión. El objetivo de este capítulo es presentar este segundo método de derivación y analizar la relación existente entre ambos procesos. Seguiremos mayoritariamente el análisis desarrollado en [5].

6.1. Derivadas covariantes

6.1.1. Derivada covariante de campos de vectores

Del mismo modo que hicimos con la derivada de Lie, comenzamos introduciendo la derivada covariante sobre campos de vectores para extender después esta definición a 1-formas y, por ende, a campos de tensores arbitrarios.

Dada una variedad diferenciable M, una *derivada covariante* o *conexión de Koszul* en M es un operador

$$\begin{array}{rcl} D : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) & \longmapsto & D_X Y \end{array}$$

verificado las siguientes propiedades:

1. D es $\mathbb{R}$-lineal en la segunda componente: $D_X(aY_1 + bY_2) = aD_XY_1 + bD_XY_2$,

2. D satisface la regla de Leibniz: $D_X(fY) = X(f)Y + fD_XY$,

3. D_XY es tensorial en la primera componente: $D_{h_1D_{X_1}+h_2X_2}Y = h_1D_{X_1}Y + h_2D_{X_2}Y$,

para cualesquiera constantes $a, b \in \mathbb{R}$ y funciones $f, h_1, h_2 \in \mathcal{F}(M)$.

Si $X = X^i \partial_{x^i}$ e $Y = Y^j \partial_{x^j}$ son las expresiones locales en coordenadas $(\mathcal{U}, (x^1, \ldots, x^n))$ de los campos de vectores X e Y, la expresión en coordenadas del campo de vectores $D_X Y$ viene dada por

$$\begin{aligned} D_X Y &= X^i D_{\partial_{x^i}} Y^j \partial_{x^j} = X^i \tfrac{\partial Y^j}{\partial x^i} \partial_{x^j} + X^i Y^j D_{\partial_{x^i}} \partial_{x^j} \\ &= X^i \tfrac{\partial Y^j}{\partial x^i} \partial_{x^j} + X^i Y^j \Gamma_{ij}^r \partial_{x^r} \\ &= \left\{ X^i \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \right\} \partial_{x^k} \end{aligned}$$

donde las funciones $\Gamma_{ij}^k : \mathcal{U} \subset M \to \mathbb{R}$ determinadas por $D_{\partial_{x^i}} \partial_{x^j} = \Gamma_{ij}^k \partial_{x^k}$ se denominan *símbolos de Christoffel* de la conexión D.

Observación 6.1. Se sigue de la expresión anterior que, fijado un punto $p \in M$, entonces el valor $(D_X Y)_p$ tan solo depende del valor en el punto, X_p, del campo de vectores X y de los valores del campo de vectores Y a lo largo de la curva integral de X que pasa por p.

En consecuencia, es posible extender la definición de la derivada covariante a un operador

$$\begin{aligned} D : T_p M \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow T_p M \\ (v, Y) &\mapsto D_v Y \end{aligned}$$

siendo $D_v Y = (D_X Y)_p$ para cualquier campo de vectores X en M que extienda al vector v, esto es, $X_p = v$.

6.1.2. Derivada covariante de campos de tensores

Para definir la derivada covariante sobre campos de tensores, nos interesa extender la definición como una derivación sobre $\mathfrak{T}(TM)$. Para ello dicha derivada covariante D deberá verificar las tres propiedades siguientes:

1. D es $\mathbb{R}$-lineal,
2. $D(K \otimes S) = D(K) \otimes S + D \otimes D(S)$ (regla de Leibniz),
3. D conmuta con las contracciones.

Empezamos obteniendo la expresión de la derivada covariante para 1-formas. Sea $\omega \in \Lambda^1(V)$, sabemos que, dado un campo de vectores X, necesariamente $D_X \omega \in \Lambda^1(V)$. Nos interesa saber como actúa $D_X \omega$ sobre cualquier campo de vectores Y. Para ello contruimos el tensor de tipo $(1, 1)$ dado por $K = Y \otimes \omega$ y consideramos C la única contracción posible sobre K. Por la tercera condición, se debe cumplir que $D_X(CK) = C(D_X K)$. Así,

$$C(D_X K) = C(D_X(Y \otimes \omega)) = C(D_X Y \otimes \omega + Y \omega D_X \omega)$$

donde en la última igualdad estamos usado la regla de Leibniz. Por tanto, por la conmutatividad con las contracciones se tiene

$$D_X(CK) = C(D_X Y \otimes \omega + Y \otimes D_X\omega) = \omega(D_X Y) + (D_X\omega)Y.$$

Deducimos de este modo que dado un campo de vectores X y una derivada covariante D, esta actúa como derivación en el espacio de 1-formas según la expresión

$$\begin{aligned}(D_X\omega)(Y) &= D_X(CK) - \omega(D_X Y)\\ &= X(\omega(Y)) - \omega(D_X Y),\end{aligned}$$

para cualquier campo de vectores $Y \in \mathfrak{X}(M)$.

De modo general, si tenemos K un campo de tensores de tipo (r, s) sobre M,

$$\begin{aligned}K : \mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M) &\to \mathcal{F}(M)\\ (X_1, \ldots, X_s, \omega_1, \ldots, \omega_r) &\mapsto K(X_1, \ldots, X_s, \omega_1, \ldots, \omega_r)\end{aligned}$$

entonces la derivada covariante $D_X K$ es también un campo de tensores de tipo (r, s) actuando del siguiente modo

$$\begin{aligned}(D_X K)(X_1, \ldots, X_s, \omega_1, \ldots, \omega_r) &= X[K(X_1, \ldots, X_s, \omega_1, \ldots, \omega_r)]\\ &\quad -\sum_{i=1}^{s} K(X_1, \ldots, D_X X_i, \ldots, X_s, \omega_1, \ldots, \omega_r)\\ &\quad -\sum_{j=1}^{r} K(X_1, \ldots, X_s, \omega_1, \ldots, D_X\omega_j, \ldots, \omega_r),\end{aligned}$$

para cualesquiera campos de vectores $X_1, \ldots, X_s$ y cualesquiera 1-formas $\omega_1, \ldots, \omega_r$ sobre M.

6.2. Transporte paralelo

A fin de introducir el transporte paralelo asociado a una derivada covariante será necesario previamente introducir la noción de campo de vectores a lo largo de una curva y extender la derivada covariante a dichos campos de vectores.

6.2.1. Campos de vectores a lo largo de una curva

Hemos trabajado hasta ahora con campos de vectores sobre una variedad M o, en su defecto, sobre algún entorno local $(\mathcal{U}, (x^1, \ldots, x^n))$. No obstante a fin de poder dar significado a la velocidad de una curva y su aceleración, nos interesará también el estudio de campos de vectores a lo largo de una curva dada sobre M.

Sea $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ una curva diferenciable sobre M. Un *campo de vectores a lo largo de* γ es una aplicación diferenciable $V : I \subset \mathbb{R} \to TM$ de forma que $V(t) \in T_{\gamma(t)}M$ para cualquier $t \in I$. Denotamos por $\mathfrak{X}_t$ los campos de vectores a lo largo de la curva γ. Así como hasta ahora los campos de vectores estaban definidos sobre la variedad, un campo de vectores a lo largo de una curva está definido sobre el intervalo de definición de dicha curva. Podemos escribir $V(t)$ en términos de la base del espacio tangente a M sobre los puntos de la curva $\gamma(t)$:

$$V(t) = V^i(t)\partial_{x^i}(\gamma(t)).$$

De este modo la diferenciabilidad de $V(t)$ equivale a la diferenciabilidad de las componentes $V^i(t)$. Dado un campo de vectores a lo largo de una curva $V(t)$, surge de manera natural preguntarnos si es posible extender $V(t)$ a un campo de vectores sobre M. Diremos que $V(t)$ es *extensible* si existe un campo de vectores sobre M, $\widetilde{V}$, verificando $V(t) = \widetilde{V}_{\gamma(t)}$ para todo $t \in I$.

Observación 6.2. Dado un campo de vectores X sobre M, la restricción del campo a una curva γ, $X \mid_{\gamma(t)}$, es un campo de vectores a lo largo de γ trivialmente extensible. No obstante no todo campo de vectores a lo largo de una curva se puede extender a la variedad.

La velocidad de la curva γ, $\dot{\gamma} : t \in I \subset \mathbb{R} \mapsto \dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}M$, es un campo de vectores a lo largo de γ que, en general, no es extensible dado que la curva γ puede presentar auto-intersecciones.

6.2.2. Derivación de campos de vectores a lo largo de una curva inducida por una conexión

El objetivo de esta sección es probar el siguiente resultado que nos dice como dada una derivación covariante D sobre M y una curva γ, la derivada covariante induce una derivación sobre $\mathfrak{X}_t$ y, con esto, poder definir cuando un campo de vectores es paralelo a lo largo de γ.

Teorema 6.3. *Sea D una derivada covariante sobre M y $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ una curva en M. Entonces D determina un único operador $D_t : \mathfrak{X}_t \to \mathfrak{X}_t$ verificando las siguientes condiciones:*

1. *D_t es $\mathbb{R}$-lineal, esto es, $D_t(aV + bW) = aD_tV + bD_tW$ para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$,*
2. *D_t verifica la regla de Leibniz $D_t(f(t)V(t)) = \frac{d}{dt}f(t)V(t) + f(t)D_tV(t)$ para cualquiera función $f \in \mathcal{F}(I)$,*
3. *Si V es la restricción a γ de un campo de vectores $Y \in \mathfrak{X}(M)$, entonces se cumple*

$$D_tV = D_{\dot{\gamma}(t)}Y.$$

Demostración. Consideremos un abierto coordenado $(\mathcal{U},(x^1,\ldots,x^n))$ de forma que la curva γ se expresa en coordenadas locales como $\gamma(t)=(\gamma^1(t),\ldots,\gamma^n(t))$. Así la velocidad de γ es el campo de vectores a lo largo de γ dado en coordenadas locales por $\dot{\gamma(t)}=(\dot\gamma^1(t),\ldots,\dot\gamma^n(t))=\dot\gamma^\ell(t)\partial_{x^\ell}(\gamma(t))$.

Sea $V(t)=V^i(t)\partial_{x^i}(\gamma(t))$ un campo de vectores a lo largo de γ y supongamos que existe un operador $D_t:\mathfrak{X}_t\to\mathfrak{X}_t$ verificando las condiciones del teorema. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} D_tV &= D_t(V^k(t)\partial_{x^k})=\frac{dV^k}{dt}(t)\partial_{x^k}+V^jD_t\partial_{x^j} \\ &= \frac{dV^k}{dt}(t)\partial_{x^k}+V^jD_{\dot\gamma(t)}\partial_{x^j}=\frac{dV^k}{dt}(t)\partial_{x^k}+V^j(\dot\gamma^iD_{\partial_{x^i}}\partial_{x^j}) \\ &= \frac{dV^k}{dt}(t)\partial_{x^k}+\dot\gamma^iV^j\Gamma_{ij}^k\partial_{x^k}=\left\{\frac{dV^k}{dt}(t)+\dot\gamma^iV^j\Gamma_{ij}^k\right\}\partial_{x^k}\,. \end{aligned}$$

Como vemos D_t está enteramente determinado por $\dot\gamma$, las componentes V^j de campo de vectores $V\in\mathfrak{X}_t$ y los símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k, de donde deducimos la unicidad.

La existencia se deduce del hecho de que podemos cubrir la curva γ con cartas coordenadas y definir D_tV en cada carta del mismo modo, y por la unicidad probada se garantiza que dicho operador está definido sin ambigüedad. □

Definición 6.4. Sea M una variedad con una derivada covariante D. Un campo de vectores $V\in\mathfrak{X}_t$ es *paralelo a lo largo de* γ si $D_tV=0$.

La demostración del Teorema 6.3 nos aporta la expresión en coordenadas de D_tV, con la que podemos reescribir la condición $D_tV=0$ como $0=D_tV=\left\{\frac{dV^k}{dt}(t)+\dot\gamma^iV^j\Gamma_{ij}^k\right\}\partial_{x^k}$ y por tanto es equivalente al sistema de ecuaciones

$$\frac{dV^k}{dt}(t)=-\dot\gamma^i(t)\,V^j(t)\,\Gamma_{ij}^k(\gamma(t))\,,$$

para cada $k=1,\ldots,n$. De esta forma tenemos un sistema de n ecuaciones de primer orden, lineal y homogéneo; por lo que está asegurada la existencia y unicidad de soluciones definidas en todo el intervalo I para el problema de valor inicial dado por cierta condición $V^i(t_0)=a^i$ para cada $i=1,\ldots,n$. Además, el conjunto de estas soluciones posee una estructura de espacio vectorial. Como consecuencia se tiene el siguiente resultado

Teorema 6.5. *Dada una curva $\gamma:I\subset\mathbb{R}\to M$, $t_0\in I$ y un vector $v_0\in T_{\gamma(t_0)}M$, existe un único campo de vectores paralelo $V(t)$ a lo largo de γ verificando $V(t_0)=v_0$.*

Dicho campo $V(t)$ es lo que llamaremos *desplazamiento paralelo* de $v_0\in T_{\gamma(t_0)}M$ a lo largo de γ.

Dados $t_0, t_1 \in I$ el desplazamiento paralelo nos aporta una identificación entre los espacios vectoriales $T_{\gamma(t_0)}M$ y $T_{\gamma(t_1)}M$ del siguiente modo:

$$\begin{array}{rcl} {}^{\gamma}\mathcal{P}_{t_0}^{t_1} : T_{\gamma(t_0)}M & \to & T_{\gamma(t_1)}M \\ v & \mapsto & V(t_1) \end{array}$$

donde $V(t)$ es el único campo de vectores paralelo a lo largo de γ verificando la condición inicial $V(t_0) = v$. A la aplicación ${}^{\gamma}\mathcal{P}_{t_0}^{t_1}$ la llamaremos *transporte paralelo* a lo largo de γ desde $\gamma(t_0)$ hasta $\gamma(t_1)$.

Proposición 6.6. *La aplicación* ${}^{\gamma}\mathcal{P}_{t_0}^{t_1} : T_{\gamma(t_0)}M \to T_{\gamma(t_1)}M$ *es un isomorfismo de espacios vectoriales.*

Demostración. Sean $v, w \in T_{\gamma(t_0)}M$ y denotemos por $V(t)$ y $W(t)$ los campos de vectores paralelos a lo largo de $\gamma(t)$ verificando las condiciones iniciales $V(t_0) = v$, $W(t_0) = w$. Por tanto el desplazamiento paralelo ${}^{\gamma}\mathcal{P}_{t_0}^{t_1}$ verifica

$${}^{\gamma}\mathcal{P}_{t_0}^{t_1}(v) = V(t_1), \qquad {}^{\gamma}\mathcal{P}_{t_0}^{t_1}(w) = W(t_1).$$

Para cada $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, el campo de vectores a lo largo de $\gamma(t)$ dado por $\lambda V(t) + \mu W(t)$ sigue siendo paralelo (ya que $D_t(\lambda V + \mu W) = \lambda D_t V + \mu D_t W = 0$) y por tanto el desplazamiento paralelo del vector $\lambda v + \mu w$ está dado por

$${}^{\gamma}\mathcal{P}_{t_0}^{t_1}(\lambda v + \mu w) = \lambda V(t_1) + \mu W(t_1) = \lambda\, {}^{\gamma}\mathcal{P}_{t_0}^{t_1}(v) + \mu\, {}^{\gamma}\mathcal{P}_{t_0}^{t_1}(w)\,,$$

lo que muestra que ${}^{\gamma}\mathcal{P}_{t_0}^{t_1}$ es lineal.

Veamos ahora que ${}^{\gamma}\mathcal{P}_{t_0}^{t_1}$ es inyectiva, de donde se seguirá que es un isomorfismo de espacios vectoriales. Sea $v \in T_{\gamma(t_0)}M$ de forma que ${}^{\gamma}\mathcal{P}_{t_0}^{t_1}(v) = \vec{0}$. Como el desplazamiento paralelo del vector $\vec{0}$ es justamente $\vec{0}$ para todo $t \in I$, si $\vec{0} =^{\gamma} \mathcal{P}_{t_0}^{t_1}(v)$, por la unicidad del desplazamiento paralelo necesariamente $v = \vec{0}$. Al ser ${}^{\gamma}\mathcal{P}_{t_0}^{t_1}$ una aplicación lineal e inyectiva entre espacios vectoriales de igual dimensión es un isomorfismo. □

6.2.3. Expresión de la derivada covariante en términos del transporte paralelo

Veremos ahora un resultado que relaciona la expresión de la derivada covariante con el transporte paralelo. Además, en la demostración del mismo se muestra también que dicha derivada covariante es la derivación (usual) de una cierta función real construida a partir de la identificación de espacios tangentes por medio del transporte paralelo.

Proposición 6.7. *Sean X e Y campos de vectores sobre M y $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ curva integral de X verificando $\gamma(0) = p$. Se tiene entonces que*

$$(D_X Y)_p = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[({}^{\gamma}\mathcal{P}_0^t)^{-1}(Y_{\gamma(t)}) - Y_p].$$

Demostración. Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de T_pM y denotemos por $\{E_1(t), \ldots, E_n(t)\}$ al conjunto formado por el desplazado paralelo de los vectores $\{e_i\}$. Dicho conjunto forma, para cada valor de $t \in I$, una base de $T_{\gamma(t)}M$ en virtud de la Proposición 6.6. Nótese que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $E_i(t)$ es el único campo de vectores paralelo a lo largo de γ verificando $E_i(0) = e_i$.

Escribiendo el campo de vectores $Y_{\gamma(t)}$ a lo largo de $\gamma(t)$ en términos de la base $\{E_1(t), \ldots, E_n(t)\}$ como $Y_{\gamma(t)} = \sum_{k=1}^n f_k(t)E_k(t)$ entonces

$$\begin{aligned}({}^{\gamma}\mathcal{P}_0^t)^{-1}(Y_{\gamma(t)}) &= ({}^{\gamma}\mathcal{P}_0^t)^{-1}(\sum_{k=1}^n f_k(t)E_k(t)) = \sum_{k=1}^n ({}^{\gamma}\mathcal{P}_0^t)^{-1}(f_k(t)E_k(t)) \\ &= \sum_{k=1}^n f_k(t)({}^{\gamma}\mathcal{P}_0^t)^{-1}(E_k(t)) = \sum_{k=1}^n f_k(t)e_k \,.\end{aligned}$$

Utilizando la identificación de espacios vectoriales dada por el desplazamiento paralelo $({}^{\gamma}\mathcal{P}_0^t)^{-1} : T_{\gamma(t)}M \to T_pM$, construimos una curva de vectores tangentes en T_pM, $\widetilde{Y}(t)$, dada por

$$\widetilde{Y} : t \in I \subset \mathbb{R} \longmapsto \widetilde{Y}(t) := ({}^{\gamma}\mathcal{P}_0^t)^{-1}(Y_{\gamma(t)}) \in T_pM \,.$$

Entonces la derivada en tiempo $t = 0$ de la curva $\widetilde{Y}(t)$ está dada por

$$\begin{aligned}\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[({}^{\gamma}\mathcal{P}_0^t)^{-1}(Y_{\gamma(t)}) - Y_p] &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\widetilde{Y}(t) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}({}^{\gamma}\mathcal{P}_0^t)^{-1}(Y_{\gamma(t)}) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\sum_{k=1}^n f_k(t)e_k = \sum_{k=1}^n (\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}f_k(t)e_k + f_k(t)\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}e_k) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}f_k(t)e_k = \sum_{k=1}^n f_k'(0)e_k.\end{aligned}$$

Por otro lado, dado que $Y_{\gamma(t)}$ es un campo de vectores a lo largo de $\gamma(t)$ y $\gamma(t)$ es curva integral de X, se verifica

$$D_tY\Big|_{t=0} = D_{\dot{\gamma}}Y\Big|_{t=0} = D_{\dot{\gamma}(0)}Y = D_{X(p)}Y = (D_xY)_p \,,$$

y por tanto el valor en el punto $p \in M$ de la derivada covariante $D_X Y$ verifica

$$\begin{aligned} D_t Y &= D_t(\sum_{k=1}^n f_k(t) E_k(t)) = \sum_{k=1}^n D_t(f_k(t) E_k(t)) \\ &= \sum_{k=1}^n (\frac{d}{dt} f_k(t) E_k(t) + f_k(t) D_t E_k(t)) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{d}{dt} f_k(t) E_k(t)\,, \end{aligned}$$

dado que $E_k(t)$ es un campo paralelo a lo largo de γ. Por tanto

$$D_t Y\big|_{t=0} = \sum_{k=1}^n f_k'(0) E_k(0) = \sum_{k=1}^n f_k'(0) e_k\,,$$

de donde se sigue que $D_t Y\big|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[({}^\gamma\mathcal{P}_0^t)^{-1}(Y_{\gamma(t)}) - Y_p] = \widetilde{Y}'(0)$. □

6.3. Torsión de una conexión: relación con la derivada de Lie

Hemos visto pues dos procesos diferentes, pero análogos en su construcción, para derivar objetos sobre una variedad. En el que ocupa la atención central de este trabajo, la derivada de Lie, hemos identificado espacios vectoriales tangentes en diferentes puntos de la variedad mediante el flujo de un campo de vectores. En el otro proceso determinado por una derivada covariante (o conexión), identificamos los espacios tangentes mediante el transporte paralelo asociado a dicha derivada covariante.

Cabe ahora preguntarse pues, si existe alguna relación entre ambas construcciones. Los dos operadores coinciden en su actuación sobre el espacio de funciones $\mathcal{F}(M)$, pues ya vimos en la Proposición 3.5 que $\mathcal{L}_X(f) = X(f)$ para un campo de vectores X dado y cualquier $f \in \mathcal{F}(M)$; y en el caso de la derivada covariante se tiene

$$(D_X f)_p = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(f \circ \gamma)(t) = X_p(f)$$

para todo punto $p \in M$ y toda función $f \in \mathcal{F}(M)$, siendo γ una curva integral de X pasando por $p \in M$.

No ocurre lo mismo al considerar la actuación de ambos procesos de derivación sobre el espacio de campos de vectores, donde la relación viene determinada en términos de la torsión de la conexión, que introducimos a continuación.

Definición 6.8. Llamamos *torsión de una derivada covariante (o conexión)* D al campo de tensores $T(X, Y) = D_X Y - D_Y X - [X, Y] = D_X Y - D_Y X - \mathcal{L}_X Y$.

Observación 6.9. La torsión de una conexión D es un campo de tensores de tipo $(1,2)$ pues es una aplicación $T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ bilineal sobre $\mathcal{F}(M)$ pues para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ y $f, g \in \mathcal{F}(M)$

$$T(fX + gZ, Y) = D_{fX+gZ}Y - D_Y(fX + gZ) - [fX + gZ, Y]\,.$$

Utilizando las propiedades de la derivada covariante y del producto corchete, se tiene que

$$\begin{aligned} T(fX + hZ, Y) &= fD_XY + hD_ZY - Y(f)X - fD_YX - Y(h)Z - hD_YZ \\ &\quad -[fX + hZ, Y] \\ &= fT(X, Y) + hT(X, Y)\,, \end{aligned}$$

lo que prueba la tensorialidad de la torsión en su primer argumento. Para mostrar la tensorialidad del segundo argumento de la torsión, basta observar que

$$T(Y, X) = D_YX - D_XY - [Y, X] = -(D_XY - D_YX) - (-[X, Y]) = -T(X, Y)\,,$$

de donde se sigue que la torsión es antisimétrica y por tanto también tensorial en el segundo argumento.

Diremos que una derivada covariante D es *simétrica* (o libre de torsión) si $T(X, Y) = 0$.

Proposición 6.10. *Sea D una derivada covariante en una variedad M. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes*

1. *D es simétrica, esto es $T(X, Y) = 0$.*
2. *La derivada covariante actúa de forma simétrica sobre campos de vectores coordenados. Esto es, para cualesquiera coordenadas locales $(\mathcal{U}, (x^1, \dots, x^n))$ se tiene que $D_{\partial_{x^i}}\partial_{x^j} = D_{\partial_{x^j}}\partial_{x^i}$.*
3. *Los símbolos de Christoffel asociados a la derivada covariante verifican $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.*

Demostración. Supongamos que D es simétrica. Es conocido que el producto corchete de campos coordenados es nulo, esto es, $[\partial_{x^i}, \partial_{x^j}]$ para todo $i, j = 1, \dots, n$. De esta forma, dado que la torsión es nula,

$$\begin{aligned} T(\partial_{x^i}, \partial_{x^j}) &= D_{\partial_{x^i}}\partial_{x^j} - D_{\partial_{x^j}}\partial_{x^i} - [\partial_{x^i}, \partial_{x^j}] \\ &= D_{\partial_{x^i}}\partial_{x^j} - D_{\partial_{x^j}}\partial_{x^i} = 0 \end{aligned}$$

para cualesquiera i, j, por lo que $D_{\partial_{x^i}}\partial_{x^j} = D_{\partial_{x^j}}\partial_{x^i}$.

Supongamos ahora que $D_{\partial_{x^i}}\partial_{x^j} = D_{\partial_{x^j}}\partial_{x^i}$ y probemos $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. Recordamos que $D_{\partial_{x^i}}\partial_{x^j} = \Gamma_{ji}^k\partial_{x^k}$, de este modo

$$0 = D_{\partial_{x^i}}\partial_{x^j} - D_{\partial_{x^j}}\partial_{x^i} = (\Gamma_{ji}^k - \Gamma_{ji}^k)\partial_{x^k}$$

y por tanto $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$.

Finalmente, probemos que si $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$ entonces la conexión es simétrica. Sean $X = X^i\partial_{x^i}$ y $Y = Y^j\partial_{x^j}$,

$$\begin{aligned} D_XY - D_YX &= \{X(Y^k) - Y(X^k) + X^iY^j\Gamma^k_{ij} - Y^iX^j\Gamma^k_{ij}\}\partial_{x^k} \\ &= \{X(Y^k) - Y(X^k) + X^iY^j(\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji})\}\partial_{x^k} \end{aligned}$$

y como $\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji} = 0$ por hipótesis,

$$D_XY - D_YX = \{X(Y^k) - Y(X^k)\}\partial_{x^k} = [X, Y].$$

$\square$

6.4. Métricas de Riemann: conexión de Levi Civita

Recordemos que una métrica de Riemann, g, sobre una variedad M es un campo de tensores de tipo $(0, 2)$ simétrico y definido positivo que, por tanto, induce un producto escalar definido positivo en cada espacio tangente.

A continuación analizamos el significado geométrico de la anulación de la derivada covariante $D_Xg(Y, Z) = 0$. Esta condición es equivalente a $X_g(Y, Z) = g(D_XY, Z) + g(Y, D_XZ)$ para cualesquiera campos de vectores en M, y considerando $\gamma(t)$ una curva integral de X, es equivalente a que $\frac{d}{dt}g(V, W) = g(D_tV, W) + g(V, D_tW)$ para V, W campos de vectores a lo largo de $\gamma(t)$.

Proposición 6.11. *Sea (M, g) una variedad dotada de una métrica de Riemann g. Para cada campo de vectores X en M se tiene que la derivada covariante $D_Xg = 0$ si y sólo si el transporte paralelo a lo largo de las curvas integrales de X, ${}^\gamma\mathcal{P}^t_0 : T_{\gamma(0)}M \to T_{\gamma(t)}M$, es una isometría lineal.*

Demostración. Veremos que ${}^\gamma\mathcal{P}^t_0$ es una isometría lineal si y sólo si $\frac{d}{dt}g(V, W) = g(D_tV, W) + g(V, D_tW)$ para $V, W \in \mathfrak{X}_t$.

Supongamos pues que el desplazamiento paralelo a lo largo de las curvas integrales de X, ${}^\gamma\mathcal{P}^t_0$, es una isometría. Tomamos $\{e_i\}$ una base ortonormal de T_pM y calculamos su desplazado paralelo a lo largo de γ, $\{E_i(t)\}$, que por ser ${}^\gamma\mathcal{P}^t_0$ una isometría es una base ortonormal de $T_{\gamma(t)}M$. Si escribimos $V(t) = \sum_{k=1}^n f_k(t)E_k(t)$ y $W(t) = \sum_{j=1}^n h_j(t)E_j(t)$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}g(V(t),W(t)) &= \frac{d}{dt}g(\sum_{k=1}^{n} f_k(t)E_k(t), \sum_{j=1}^{n} h_j(t)E_j(t)) \\
&= \frac{d}{dt}(\sum_{k,j=1}^{n} f_k(t)h_j(t)g(E_k(t),E_j(t))) \\
&= \frac{d}{dt}(\sum_{k=1}^{n} f_k(t)h_k(t))
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se tiene por la ortonormalidad de la base $\{E_i(t)\}$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
g(D_tV,W) = g(D_t\sum_{k=1}^{n} f_k(t)E_k(t), \sum_{j=1}^{n} h_j(t)E_j(t)) &= g(\sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dt}f_k(t)E_k(t), \sum_{j=1}^{n} h_j(t)E_j(t)) \\
= \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dt}f_k(t)h_j(t)g(E_k,E_j) = \sum_{k=1}^{n}(\frac{d}{dt}f_k(t))h_k(t)
\end{aligned}$$

pues $D_tE_k(t) = 0$ por ser campos de vectores paralelos. Procediendo de modo completamente análogo obtenemos que $g(V,D_tW) = \sum_{k=1}^{n} f_k(t)(\frac{d}{dt}h_k(t))$. En consecuencia

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}g(V(t),W(t)) = \frac{d}{dt}(\sum_{k=1}^{n} f_k(t)h_k(t)) &= \sum_{k=1}^{n}((\frac{d}{dt}f_k(t))h_j(t)) + \sum_{k=1}^{n}(f_k(t)(\frac{d}{dt}h_j(t))) \\
= g(D_tV,W) + g(V,D_tW).
\end{aligned}$$

Recíprocamente, supongamos que $\frac{d}{dt}g(V(t),W(t)) = g(D_tV,W) + g(V,D_tW)$. Tomamos una base ortonormal $\{e_i\}$ de T_pM. Su transportado paralelo $\{E_i(t)\}$ es una base de $T_{\gamma(t)}M$ y probaremos que $\{E_i(t)\}$ es ortonormal, lo que mostraría que el desplazamiento paralelo es una isometría lineal.

Si probamos que $g(E_i(t),E_j(t))$ es constante para todo $t \in I$, el resultado estaría probado, pues para $t = 0$ tenemos la base $\{e_i\}$ que si es ortonormal. Ahora bien,

$$\frac{d}{dt}g(E_i(t),E_j(t)) = g(D_tE_i(t),E_j(t)) + g(E_i(t),D_tE_j(t)) = 0$$

por ser $E_i(t), E_j(t)$ campos de vectores paralelos, lo que finaliza la demostración. □

6.4.1. La conexión de Levi Civita

Nuestro objetivo, en una formulación general, será construir una conexión para la que, dado un campo de tensores K, éste se conserve por transporte paralelo. Como vimos, esto equivale a buscar D tal que $DK = 0$.

Centraremos el estudio en el caso particular en que M es una variedad de Riemann y g el tensor métrico asociado. Buscamos construir pues una tal conexión D verificando $(D_X g)(Y,Z) = Xg(Y,Z) - g(D_x Y,Z) - g(Y, D_X Z) = 0$ para cualesquiera $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$. La solución a dicho problema viene dada por una familia infinita de conexiones que pueden describirse a partir de la conexión de Levi Civita obtenida en el siguiente teorema.

Observación 6.12. Sea D una conexión arbitraria en una variedad de Riemann (M,g) y denotemos con ∇ la conexión de Levi Civita. Sea $S(X,Y) = D_X Y - \nabla_X Y$ la diferencia entre ambas conexiones. Un cálculo sencillo muestra que S es un campo de tensores de tipo $(1,2)$ y además la conexión D hace paralela a la métrica g si y solo si

$$g(S(X,Y),Z) + g(Y, S(X,Z)) = 0\,,$$

para cualesquiera campos de vectores X,Y,Z. Por tanto las conexiones que hacen paralela a la métrica están parametrizadas, partiendo de la conexión de Levi Civita, por todos los campos de tensores S de tipo $(1,2)$ que son anti-autoadjuntos para la métrica g. Además, en esta situación la torsión de la conexión D viene dada por la componente anti-simétrica del campo de tensores S

$$T(X,Y) = D_X Y - D_Y X - [X,Y] = S(X,Y) - S(Y,X)\,.$$

Teorema 6.13. ***(Teorema fundamental de la geometría de Riemann)*** *Sea (M,g) una variedad de Riemann. Entonces existe una única conexión ∇ verificando*

(i) ∇ hace paralela a la métrica; esto es $Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$,

(ii) ∇ es simétrica; es decir $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$.

Además, tal conexión viene dada por la expresión

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) \;&=\; Xg(Y,Z) + Yg(X,Z) - Zg(X,Y) \\ &\quad + g([Z,X],Y) + g([Z,Y],X) + g([X,Y],Z), \end{aligned} \tag{6.1}$$

para cualesquiera campos de vectores X,Y,Z en M.

Demostración. Comenzamos probando la expresión (6.1) que determina la conexión ∇. Utilizando la condición $\nabla g = 0$, para cualesquiera $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene

$$\begin{aligned} Xg(Y,Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) &= 0 \\ Yg(X,Z) - g(\nabla_Y X, Z) - g(X, \nabla_Y Z) &= 0 \\ Zg(X,Y) - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y) &= 0. \end{aligned}$$

Sumando las dos primeras igualdades y restando la tercera obtenemos:

$$
\begin{aligned}
0 =& X_g(Y,Z) + Y_g(X,Z) - Z_g(X,Y) - g(\nabla_X Y, Z) - g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Z X, Y) \\
&- g(Y, \nabla_X Z) - g(X, \nabla_Y Z) + g(X, \nabla_Z Y).
\end{aligned}
$$

Usando ahora la condición $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$, y despejando obtenemos

$$
\begin{aligned}
2g(\nabla_X Y, Z) =& Xg(Y,Z) + Yg(X,Z) - Zg(X,Y) \\
&+ g([Z,X],Y) + g([Z,Y],X) + g([X,Y],Z).
\end{aligned}
$$

En consecuencia, cualquier conexión que verifique las condiciones del enunciado está determinada por (6.1), de donde se sigue la unicidad. Veremos ahora que la expresión (6.1) define una conexión que verifica las condiciones (i) y (ii) del teorema.

Probaremos ahora que ∇ es una conexión. La $\mathbb{R}$-linealidad en la segunda componente se deduce fácilmente de la bilinealidad de la métrica g y de la $\mathbb{R}$-bilinealidad del producto corchete de campos de vectores. Veamos que se verifica la regla de Leibniz para el producto por funciones en la segunda componente. Usando que $[X, fY] = X(fY) - fY(X) = X(f)Y + f[X,Y]$ para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $f \in \mathcal{F}(M)$, deducimos las siguientes igualdades:

$$
\begin{aligned}
2g(\nabla_X fY, Z) &= Xg(fY,Z) + fYg(X,Z) - Zg(X,fY) \\
&\quad + g([Z,X],fY) + g([Z,fY],X) + g([X,fY],Z) \\
&= X(f)g(Y,Z) + fXg(Y,Z) + fYg(X,Z) - Z(f)g(X,Y) - fZg(X,Y) \\
&\quad + fg([Z,X],Y) + Z(f)g(X,Y) + fg([Z,Y],X) \\
&\quad + X(f)g(Y,Z + fg([X,Y],Z) \\
&= 2fg(\nabla_X Y, Z) + 2X(f)g(Y,Z) = 2g(X(f)Y + f\nabla_X Y, Z).
\end{aligned}
$$

Dado que la igualdad se verifica para cualquier $Z \in \mathfrak{X}(M)$, deducimos que $\nabla_X fY = X(f)Y + f\nabla_X Y$. La tensorialidad en la primera componente se obtiene de manera análoga a partir de la tensorialidad de la métrica g y las propiedades del producto corchete: la $\mathbb{R}$-bilinealidad y la identidad $[fX, hY] = fh[X,Y] + f(Xh)Y - h(Yf)X$.

Finalmente comprobaremos que la conexión ∇ definida por (6.1) es simétrica y hace paralela a la métrica. Para la condición de simetría $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$ probaremos equivalentemente que

$$
\begin{aligned}
2g(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z) &= Xg(Y,Z) + Yg(X,Z) - Zg(X,Y) \\
&\quad + g([Z,X],Y) + g([Z,Y],X) + g([X,Y],Z) \\
&\quad - Yg(X,Z) - Xg(Y,Z) + Zg(Y,X) \\
&\quad - g([Z,Y],X) - g([Z,X],Y) - g([Y,X],Z) \\
&= g([X,Y],Z) - g([Y,X],Z) = 2g([X,Y],Z),
\end{aligned}
$$

de donde se sigue que la torsión de la conexión es cero. El carácter paralelo de la métrica se obtiene de forma completamente análoga

$$\begin{aligned}2g(\nabla_X Y, Z) + 2g(Y, \nabla_X Z) &= Xg(Y,Z) + Yg(X,Z) - Zg(X,Y)\\ &\quad + Xg(Y,Z) + Zg(X,Y) - Yg(X,Z)\\ &\quad + g([Z,X],Y) + g([Z,Y],X) + g([X,Y],Z)\\ &\quad + g([Y,X],Z) + g([Y,Z],X) + g([X,Z],Y)\\ &= 2Xg(Y,Z).\end{aligned}$$

En consecuencia, la expresión (6.1) define una única conexión simétrica que hace paralela a la métrica, lo que finaliza la demostración. □

La conexión ∇ construida en el teorema anterior recibe el nombre de *conexión de Levi Civita* de la variedad Riemanniana (M, g).

Observación 6.14. La expresión (6.1) en el Teorema 6.13 permite obtener los símbolos de Christoffel de la conexión de Levi Civita. Sea $(\mathcal{U}, (x^1, \dots, x^n))$ un abierto coordenado de M y denotemos por $g_{ij} = g(\partial_{x^i}, \partial_{x^j})$ los coeficientes del tensor métrico $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$. Considerando la expresión de los símbolos de Christoffel dados por $\nabla_{\partial_{x^i}} \partial_{x^j} = \Gamma_{ij}^k \partial_{x^k}$, obtenemos

$$2g(\nabla_{\partial_{x^i}} \partial_{x^j}, \partial_{x^\ell}) = 2\Gamma_{ij}^k g(\partial_{x^k}, \partial_{x^\ell}) = 2\Gamma_{ij}^k\, g_{k\ell}\,,$$

para todo $\ell = 1, \dots, n$. Usando ahora la expresión (6.1) y teniendo en cuenta que el producto corchete de campos coordenados se anula, tenemos

$$\begin{aligned}2\Gamma_{ij}^k g_{k\ell} &= \partial_{x^i} g(\partial_{x^j}, \partial_{x^\ell}) + \partial_{x^j} g(\partial_{x^i}, \partial_{x^\ell}) - \partial_{x^\ell} g(\partial_{x^i}, \partial_{x^j})\\ &= \partial_{x^i} g_{j\ell} + \partial_{x^j} g_{i\ell} - \partial_{x^\ell} g_{ij}\,.\end{aligned}$$

Denotando $(g^{\alpha\beta}) = (g_{\alpha\beta})^{-1}$ la matriz inversa de la matriz de coeficientes de la métrica, se tiene que $g_{\alpha\beta} g^{\beta r} = \delta_\alpha^r$ para $\alpha, \beta, r = 1, \dots, n$. (Nótese que la matriz $(g_{\alpha\beta})$ es invertible pues la métrica g es definida positiva). Por tanto, multiplicando la expresión anterior por $g^{\ell r}$, y sumando se tiene

$$\frac{1}{2}\{\partial_{x^i} g_{j\ell} + \partial_{x^j} g_{i\ell} - \partial_{x^\ell} g_{ij}\} g^{\ell r} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k g_{k\ell} g^{\ell r} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \delta_k^r.$$

Así, tenemos la expresión de los símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{k\ell} \{\partial_{x^i} g_{j\ell} + \partial_{x^j} g_{i\ell} - \partial_{x^\ell} g_{ij}\}. \tag{6.2}$$

6.4.2. Aceleración de una curva

Sea $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ una curva sobre una variedad de Riemann (M, g). Se define la *aceleración* de la curva $\gamma(t)$ como la derivada a lo largo de la curva de la velocidad de la misma respecto a la conexión de Levi Civita, esto es $\nabla_t \dot{\gamma}$.

Considerando el espacio Euclídeo $\mathbb{R}^n$ con la métrica g_0 determinada por el producto escalar usual de vectores, su expresión en coordenadas cartesianas $(x^1, \ldots, x^n)$ es $g_0 = dx^1 \otimes dx^1 + \cdots + dx^n \otimes dx^n$. Dado que las componentes de la métrica son constantes, se sigue de (6.2) que los símbolos de Christoffel son cero.

Sean X, Y campos de vectores en $\mathbb{R}^n$. Escribiendo $Y = (Y^1, \ldots, y^n) = Y^\ell \partial_{x^\ell}$ en la base de campos coordenados correspondientes a las coordeandas cartesianas se tiene

$$\begin{aligned} D_X Y &= \{x(Y^k) + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k\} \partial_{x^k} \\ &= \{x(Y^k)\} \partial_{x^k} = (X(Y^1), \ldots, X(Y^n)), \end{aligned}$$

que se corresponde con la derivada usual de campos de vectores en $\mathbb{R}^n$.

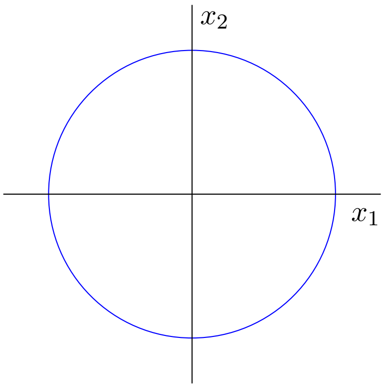
Sea ahora $\gamma(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$ una curva en $\mathbb{R}^n$. La velocidad de γ es el campo de vectores a lo largo de $\gamma(t)$ dado por $\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}^1(t), \ldots, \dot{x}^n(t)) = \dot{x}^k(t) \partial_{x^k}$. La aceleración de γ resulta entonces

$$\begin{aligned} \nabla_t \dot{\gamma} &= \{\frac{d}{dt} \dot{x}^k(t) + \dot{x}^i(t) \dot{x}^j(t) \Gamma_{ij}^k\} \partial_{x^k} \\ &= \{\frac{d}{dt} \dot{x}^k(t)\} \partial_{x^k} = \{\ddot{x}^k(t)\} \partial_{x^k} = (\ddot{x}^1(t), \ldots, \ddot{x}^n(t)), \end{aligned}$$

con lo que se obtiene la expresión usual $\ddot{\gamma}$ para expresar la velocidad de una curva γ.

Es importante tener en cuenta que a lo largo del desarrollo anterior hemos hecho uso implícito de las propiedades de las coordenadas cartesianas de $\mathbb{R}^n$, que son las coordenadas inducidas por la base ortonormal $\{e_i\}$, donde $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$. Como veremos a continuación esto no es válido incluso en $\mathbb{R}^n$ cuando se consideran otros sistemas de coordenadas.

Ejemplo 6.15. Consideramos la circunferencia unidad en el plano. Si tomamos coordenadas cartesianas, $(\mathbb{R}^2, (x^1, x^2))$, podemos parametrizar la circunferencia unidad por $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$.



$\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$

De este modo la velocidad y aceleración de $\alpha(t)$ vienen dadas por:

$$\dot{\alpha}(t) = (-\sin t, \cos t) = -\sin t \partial_{x^1} + \cos t \partial_{x^2}$$

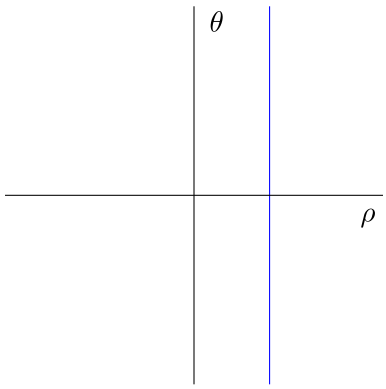
$$\ddot{\alpha}(t) = (-\cos t, -\sin t) = -\cos t \partial_{x^1} - \sin t \partial_{x^2}$$

Si ahora tomamos coordenadas polares, $(\mathcal{U}, (\rho, \theta))$ en el abierto $\mathcal{U}$ correspondiente al plano menos el semieje negativo OX incluyendo al origen,

parametrizamos la curva (que describe los puntos a distancia uno del origen) como $\beta(t) = (1, t)$ y así:

$$\dot{\beta}(t) = (0, 1) = \partial_\theta$$

$$\ddot{\beta}(t) = (0, 0)$$



$\beta(t) = (1, t)$

Ahora bien, el resultado anterior no es coherente, pues calculando “la aceleración” con una cierta parametrización en un sistema de coordenadas, la curva siempre posee aceleración; y parametrizada en coordenadas diferentes, la misma curva carece de aceleración en cualquier instante. Esto muestra que el cálculo de la aceleración simplemente como derivada segunda de la curva no es un proceso coherente en general.

En lo que sigue detallaremos el cálculo de la aceleración de la curva $\beta(t)$ (o equivalentemente la curva $\alpha(t)$ expresada en coordenadas polares). Para ello en primer lugar hemos de determinar la expresión de la conexión de Levi Civita en coordenadas polares calculando los correspondientes símbolos de Christoffel.

El cambio de coordenadas

$$F : (\mathbb{R}^2, (\rho, \theta)) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, (x^1, x^2))$$
$$(\rho, \theta) \longmapsto (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)\,,$$

induce una métrica F^*g, dada por $(F^*g)(\partial_\alpha, \partial_\beta) = g(F_*\partial_\alpha, F_*\partial_\beta)$, que no es otra cosa más que la métrica Euclídea expresada en coordenadas polares. Un cálculo inmediato muestra que

$$F_*\partial_\rho = \frac{dF}{dt}(t,\theta)\Big|_{t=\rho} = \cos\theta\partial_{x^1} + \sin\theta\partial_{x^2},$$
$$F_*\partial_\theta = \frac{dF}{dt}(\rho,t)\Big|_{t=\theta} = -\rho\sin\theta\partial_{x^1} + \rho\cos\theta\partial_{x^2}.$$

Así, la expresión de la métrica Euclídea en coordenadas polares está dada por

$$(F^*g)(\partial_\rho,\partial_\rho) = g(F_*\partial_\rho, F_*\partial_\rho) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$
$$(F^*g)(\partial_\rho,\partial_\theta) = g(F_*\partial_\rho, F_*\partial_\theta) = 0$$
$$(F^*g)(\partial_\theta,\partial_\theta) = g(F_*\partial_\theta, F_*\partial_\theta) = \rho^2\sin^2\theta + \rho^2\cos^2\theta = \rho^2.$$

Por tanto la expresión del tensor métrico resulta $g_0 = d\rho\otimes d\rho + \rho^2 d\theta\otimes d\theta$, con lo que en forma matricial tenemos

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}, \qquad (g^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^{-2} \end{pmatrix}.$$

Así los símbolos de Christoffel vienen dados por:

$$\Gamma^\rho_{\rho\rho} = \frac{1}{2}g^{\rho\rho}\{\partial_\rho g_{\rho\rho} + \partial_\rho g_{\rho\rho} - \partial_\rho g_{\rho\rho}\} = 0$$
$$\Gamma^\theta_{\rho\rho} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}\{\partial_\rho g_{\theta\rho} + \partial_\rho g_{\theta\rho} - \partial_\theta g_{\rho\rho}\} = 0$$
$$\Gamma^\rho_{\rho\theta} = \frac{1}{2}g^{\rho\rho}\{\partial_\rho g_{\theta\rho} + \partial_\theta g_{\rho\rho} - \partial_\rho g_{\rho\theta}\} = 0$$
$$\Gamma^\theta_{\rho\theta} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}\{\partial_\rho g_{\theta\theta} + \partial_\theta g_{\rho\theta} - \partial_\theta g_{\rho\theta}\} = \frac{1}{\rho}$$
$$\Gamma^\rho_{\theta\theta} = \frac{1}{2}g^{\rho\rho}\{\partial_\theta g_{\theta\rho} + \partial_\theta g_{\theta\rho} - \partial_\rho g_{\theta\theta}\} = -\rho$$
$$\Gamma^\theta_{\theta\theta} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}\{\partial_\theta g_{\theta\theta} + \partial_\theta g_{\theta\theta} - \partial_\theta g_{\theta\theta}\} = 0.$$

Ya estamos en condiciones de calcular la aceleración de β respecto a la conexión de Levi-Civita. Como $\dot\beta(t) = (0,1) = \partial_\theta$:

$$\begin{aligned}\nabla_t\dot\beta(t) &= \{\frac{d}{dt}\dot\beta^k(t) + \dot\beta^i(t)\dot\beta^j(t)\Gamma^k_{ij}(\beta(t))\}\partial_{x^k}(\beta(t))\\ &= \Gamma^\rho_{\theta\theta}(1,t)\partial_\rho\\ &= -\partial_\rho(1,t).\end{aligned}$$

de donde se sigue que la aceleración no se anula para ningún instante t.

Para terminar, comprobaremos que la velocidad y aceleración de la curva en coordenadas cartesianas y polares se corresponden mediante el cambio de coordenadas, por lo que ambos cálculos proporcionan resultados equivalentes. Como la curva $\beta(t) = (F^{-1} \circ \alpha)(t)$, tenemos que $\dot{\beta}(t) = (F^{-1} \circ \alpha)'(t) = d(F^{-1})_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) = (dF_{(F^{-1}(\alpha(t)))})^{-1}(\alpha'(t)) = (dF_{\beta(t)})^{-1}(\alpha'(t))$.

Como ya calculamos, la diferencial del cambio de coordenadas viene dada por

$$(dF) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}, \qquad (dF)_{\beta(t)} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

y por tanto su inversa

$$(dF)^{-1} = \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} \rho\cos\theta & \rho\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad (dF_{\beta(t)})^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Así

$$(dF_{\beta(t)})^{-1}(\alpha'(t))) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = (0,1) = \partial_\theta(\beta(t)) = \dot{\beta}(t),$$

lo que se corresponde con el cálculo que ya habíamos realizado. Además, la aceleración verifica $\nabla_t\dot{\beta} = (dF_{\beta(t)})^{-1}\nabla_t\dot{\alpha}$. De hecho,

$$(dF_{\beta(t)})^{-1}(\nabla_t\dot{\alpha}) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} = (-1,0) = -\partial_\rho(\beta(t)) = \nabla_t\dot{\beta}.$$

Los cálculos anteriores muestran que, a la hora de calcular la aceleración de una curva, es necesario considerar la derivada covariante incluso para curvas definidas en el espacio Euclídeo siempre y cuando trabajemos con parametrizaciones distintas de las coordenadas cartesianas.

Bibliografía

[1] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry I*, John Wiley & Sons, New York, 1963.

[2] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry II*, John Wiley & Sons, New York, 1969.

[3] Jeffrey M. Lee, *Manifolds and Differential Geometry*, American Mathematical Society, 2009.

[4] John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds* (segunda edición). Graduate Texts in Mathematics, **218**. Springer, New York, 2013.

[5] John M. Lee, *Introduction to Riemannian manifolds* (segunda edición). Graduate Texts in Mathematics, **176**. Springer, Cham, 2018.

[6] V. I. Panzhensky, N. A. Tyapin, Automorphisms of symplectic and contact structures, *J. Math. Sci.* **217** (2016), 557–594.